5. Sätze über komplexe Zahlen

5.0 Was lernen wir?

Didaktischer Hinweis

Für Schüler reicht es meist aus, die Unterkapitel 5.1 bis 5.4 zu bearbeiten. Die anderen Unterkapitel dieses Kapitels werden nur benötigt, wenn man auch lernen will, wie man komplexe Gleichungen löst (wir lernen dies am Ende des Buches).

Kapitel 5.1

Wir lernen die Konjugation kennen: $z = a + bi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = a - bi$

Kapitel 5.2

$$z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$$

Kapitel 5.3

$$z - \bar{z} = 2i \cdot Im(z)$$

Kapitel 5.4

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \qquad \text{wenn: } z = a+bi$$

Kapitel 5.5

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad z \neq 0$$

Kapitel 5.6

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Kapitel 5.7

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Kapitel 5.8

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Kapitel 5.9

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\left(\overline{z_1}\right)}{\left(\overline{z_2}\right)} \qquad z_2 \neq 0$$

Kapitel 5.10

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Kapitel 5.11

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Kapitel 5.12

$$|z| = |\overline{z}|$$

Kapitel 5.13

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Kapitel 5.14

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad w \neq 0$$

Kapitel 5.15

$$|Re(z)| \leq |z|$$

Kapitel 5.16

$$|Im(z)| \leq |z|$$

Kapitel 5.17

$$Re(z \pm w) = Re(z) \pm Re(w)$$

Kapitel 5.18

$$Im(z \pm w) = Im(z) \pm Im(w)$$

Kapitel 5.19

$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad z,w \in \mathbb{C}$$

Kapitel 5.20

$$|z - w| \geq |z| - |w| \qquad z,w \in \mathbb{C}$$

Kapitel 5.21

Übungsaufgaben zum Kapitel

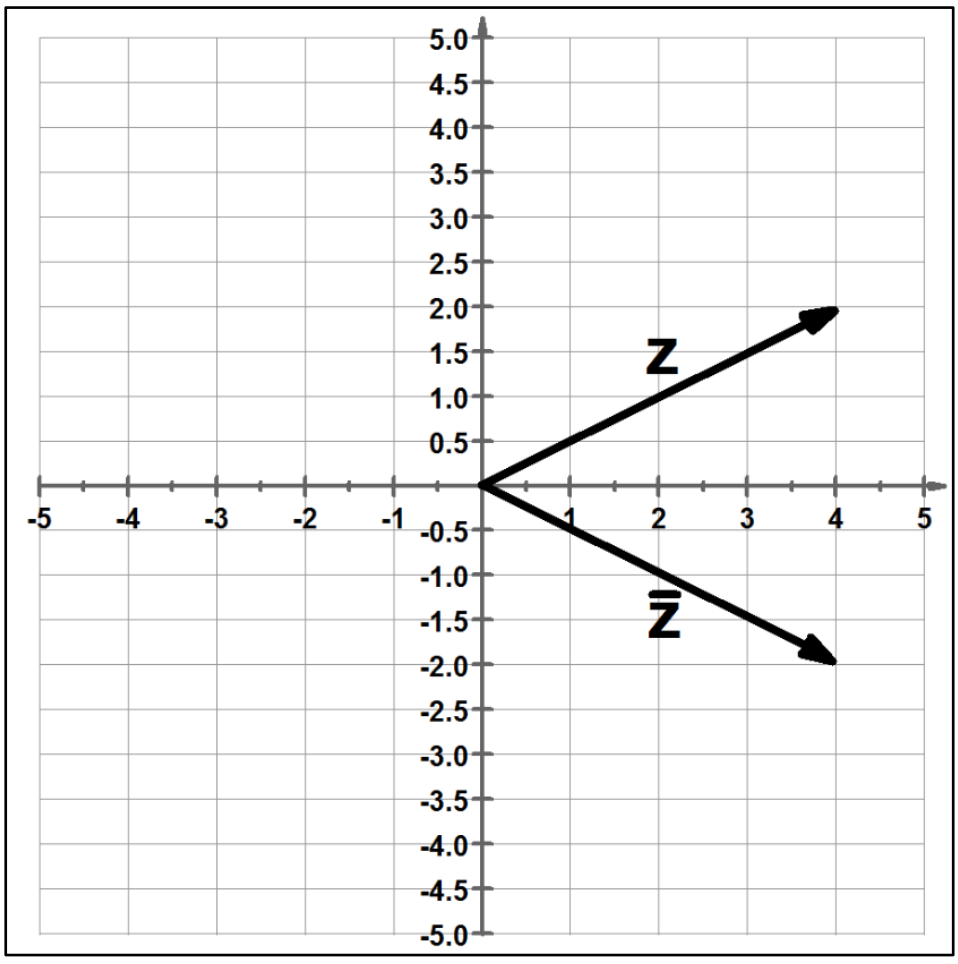
5.1 Die Konjugation

Die Konjugation

- *Ändert man bei einer komplexen Zahl $z = a + bi$ das Vorzeichen des Imaginärteils, so bezeichnet man das Ergebnis als die zu z komplex konjugierte Zahl, die meist mit $\bar{z}$ oder z^* bezeichnet wird.*
- *Somit gilt:*
  Ist $z = a + bi$ so lautet die komplex konjugierte Zahl $\bar{z} = a - bi$. .
  Ist $z = a - bi$ so lautet die komplex konjugierte Zahl $\bar{z} = a + bi$.
- *Die beiden Zahlen $z = a + bi$ und $\bar{z} = a - bi$ werden als konjugiert komplexes Zahlenpaar bezeichnet.*

Graphische Darstellung der Konjugation

Bildet man die konjugiert komplexe Zahl, so entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse.



5.2 Summe aus komplexer Zahl und Konjugation

Satz

Addiert man zu einer komplexen Zahl das Konjugierte, so erhält man als Ergebnis reelle Zahl, nämlich das Zweifache des Realteils von z:

$$z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$$

Anwendungen

Diese Formel wird später bei einem ganz bestimmten Verfahren benötigt, bei dem es darum geht, die sogenannte „Analytizität“ einer komplexe Funktion zu beweisen.

Zweitens kann mit dieser Formel ohne konkrete Rechnung erkennen, dass die Summe aus einer komplexen Zahl und der zugehörigen konjugiert komplexer Zahl eine reelle Zahl ist. Dies ist manchmal hilfreich.

Beweis

Gesucht:	$z + \bar{z} =$
Sei $z = a + bi$	$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$
Klammer auflösen:	$z + \bar{z} = 2a + bi - bi$
Vereinfachen:	$z + \bar{z} = 2a$
$Re(z) = a$ *beachten:*	$z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z)$

Zahlenbeispiel

$$(7 + 9i) + (7 - 9i) = 2 \cdot 7 = 14$$

5.3 Differenz aus komplexer Zahl und Konjugation

Satz

Subtrahiert man von einer komplexen Zahl ihr Konjugiertes, so erhält man als Ergebnis eine imaginäre Zahl:

$$z - \bar{z} = 2i \cdot Im(z)$$

Beweis

Gesucht:	$z - \bar{z} =$
Sei $z = a + bi$	$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$
Klammer auflösen:	$z - \bar{z} = a - a + bi + bi$
Vereinfachen:	$z - \bar{z} = 2 \cdot bi$
Im(z) = b beachten:	$z - \bar{z} = 2i \cdot Im(z)$

5.4 Produkt aus komplexer Zahl und Konjugation

Satz

Multipliziert man zwei konjugiert komplexe Zahlen, so ist das Ergebnis eine *reelle Zahl*. Diese Tatsache ist z.B. nützlich, wenn ein Bruch einen komplexen Nenner hat, und man diesen reell machen möchte (wir werden später zeigen, wie das funktioniert).

Wenn z=a+bi dann gilt:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Beweis

Sei $z = a + bi$. *Dann gilt:*

Gegeben:	$z \cdot \bar{z} =$
Ausführlich schreiben:	$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$
Klammern ausmultiplizieren :	$z \cdot \bar{z} = a^2 - abi + abi - b^2 i^2$
Die Definition $i^2 = -1$ *anwenden:*	$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
Die Formel für den Betrag einer komplexen Zahl anwenden: $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$z \cdot \bar{z} = \lvert z\rvert^2$

5.5 Quotient aus komplexer Zahl und Konjugation

Vorbemerkung

Auf der vorigen Seite haben wir gesehen, dass das ***Produkt*** aus komplexer Zahl und ihrer Konjugation eine reelle Zahl ist. Oft stellt sich die Frage, ob dies auch für den ***Quotionten*** gilt. Die Antwort ist „nein“, denn es gilt der folgende Satz:

Satz

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad mit:\ z \neq 0$$

Beweis

Gegeben:	$\frac{z}{\overline{z}} =$
Mit z erweitern:	$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{z}{z}$
Vereinfachen:	$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{\overline{z} \cdot z}$
Im Nenner steht das Produkt aus einer komplexen Zahl und ihrer Konjugation. Dazu haben wir auf der vorigen Seite eine Formel hergeleitet: $\overline{z} \cdot z = \lvert z \rvert^2$	$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{\lvert z \rvert^2}$

5.6 Konjugation einer Summe

Satz

Man findet das komplex Konjugierte einer Summe, indem man die einzelnen Summanden komplex Konjugiert:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Beweis

Gegeben:	$\overline{z_1 + z_2}$
Ausführlich schreiben:	$\overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)}$
Umordnen:	$\overline{a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i}$
i ausklammern:	$\overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$
Das komplex Konjugierte bilden:	$a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2)$
i ausmultiplizieren:	$a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i$
Umordnen:	$a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i$
Zur Verdeutlichung Klammern setzen:	$(a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i)$
Die komplex Konjugierten bilden:	$\overline{a_1 + b_1 i} + \overline{a_2 + b_2 i}$
Zur Kurzschreibweise wechseln ergibt die Lösung:	$\overline{z_1} + \overline{z_2}$

5.7 Konjugation einer Differenz

Satz

Man findet das komplex Konjugierte einer Differenz, indem man Minuend und Subtrahend einzeln konjugiert:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Beweis

Gegeben:	$\overline{z_1 - z_2}$
Ausführlich schreiben:	$\overline{(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)}$
Umordnen:	$\overline{a_1 - a_2 + b_1 i - b_2 i}$
i ausklammern:	$\overline{(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)}$
Das komplex Konjugierte bilden:	$(a_1 - a_2) - i(b_1 - b_2)$
i ausmultiplizieren:	$a_1 - a_2 - b_1 i + b_2 i$
Umordnen:	$a_1 - b_1 i - a_2 + b_2 i$
Klammern setzen:	$(a_1 - b_1 i) - (a_2 - b_2 i)$
Die komplex Konjugierten bilden:	$\overline{a_1 + b_1 i} - \overline{a_2 + b_2 i}$
Zur Kurzschreibweise wechseln:	$\overline{z_1} - \overline{z_2}$

5.8 Konjugation eines Produktes

Satz

Das komplex Konjugierte eines Produktes findet man, indem man die einzelnen Faktoren komplex konjugiert:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Beweisidee

Die Beweisidee besteht darin, dass wir zunächst den Quotienten in eine einzelne komplexe Zahl umformen.

Dadurch können wir dann die Konjugation durchführen, denn die Konjugation ist ja nur für eine einzelne komplexe Zahl definiert.

Sobald wir die Konjugation durchgeführt haben, wandeln wir die komplexe Zahl wieder in die zwei gegebenen komplexen Zahlen um.

Beweis

Gegeben:	$\overline{z_1 \cdot z_2}$
Ausführlich schreiben:	$\overline{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)}$
Ausmultiplizieren (Beachte: $i^2 = -1$):	$\overline{a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2}$
i ausklammern:	$\overline{a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2}$
Das komplex Konjugierte bilden:	$a_1 a_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2$
Klammer ausmultiplizieren:	$a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - b_1 b_2$
a_1 ausklammern:	$a_1(a_2 + i b_2) + i a_2 b_1 - b_1 b_2$
$i^2 = -1$:	$a_1(a_2 + i b_2) + i a_2 b_1 + i^2 b_1 b_2$
$b_1 i$ ausklammern :	$a_1(a_2 + i b_2) + b_1 i(a_2 + i b_2)$
$(a_2 + i b_2)$ ausklammern:	$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + i b_2)$
Die komplex Konjugierten bilden:	$\overline{a_1 - b_1 i} \cdot \overline{a_2 - b_2 i}$
Zur Kurzschreibweise wechseln:	$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

5.9 Konjugation eines Quotienten

Satz

Sucht man das komplex Konjugierte eines Quotienten zweier komplexer Zahlen, dann findet man es, indem man Zähler und Nenner einzeln konjugiert:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad \text{mit: } z_2 \neq 0$$

Beweisidee

Die Beweisidee ist die gleiche, wie bei der Konjugation eines Produktes (voriges Kapitel).

Die Beweisidee besteht darin, dass wir zunächst den Quotienten in eine einzelne komplexe Zahl umformen.

Dadurch können wir dann die Konjugation durchführen, denn die Konjugation ist ja nur für eine einzelne komplexe Zahl definiert.

Sobald wir die Konjugation durchgeführt haben, wandeln wir die komplexe Zahl wieder in die zwei gegebenen komplexen Zahlen um.

Der Beweis folgt auf der nächsten Seite.

Beweis

Gegeben:	$\overline{\frac{z_1}{z_2}}$
Ausführlich schreiben:	$\overline{\frac{(a+bi)}{(c+di)}}$
Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners (damit der Nenner rational wird):	$\overline{\frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)}}$
Nenner wir rational durch Anwendung der Formel für die "Multiplikation mit Konjugierten"	$\overline{\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c^2+d^2)}}$
Zähler ausmultiplizieren (Beachte: $i^2 = -1$):	$\overline{\frac{ac-adi+bci+bd}{(c^2+d^2)}}$
Bruch aufteilen:	$\overline{\frac{ac+bd}{(c^2+d^2)} + \frac{bci-adi}{(c^2+d^2)}}$
i ausklammern:	$\overline{\frac{ac+bd}{(c^2+d^2)} + i\frac{bc-ad}{(c^2+d^2)}}$
Nun das komplex Konjugierte bilden:	$\frac{ac+bd}{(c^2+d^2)} - i\frac{bc-ad}{(c^2+d^2)}$
Brüche zusammenfassen:	$\frac{ac+bd-i(bc-ad)}{(c^2+d^2)}$
Zähler: Klammer ausmultiplizieren *Nenner: Formel für "Multiplikation mit Konjugierten" anwenden*	$\frac{ac+bd-bci+adi}{(c+di)(c-di)}$
c bzw. d ausklammern:	$\frac{c(a-bi)+d(b+ai)}{(c+di)(c-di)}$
Zähler: Das d vor zweiter Klammer mit $1 = -i^2$ multiplizieren:	$\frac{c(a-bi)-di^2(b+ai)}{(c+di)(c-di)}$
Zähler: Zweite Klammer mit einem der i multiplizieren	$\frac{c(a-bi)-di(bi-a)}{(c+di)(c-di)}$
Zähler: Zweite Klammer mit dem "Minus" multiplizieren	$\frac{c(a-bi)+di(a-bi)}{(c+di)(c-di)}$
Im Zähler $(a-bi)$ ausklammern:	$\frac{(c+di)(a-bi)}{(c+di)(c-di)}$
$(c+di)$ kann nun gekürzt werden:	$\frac{a-bi}{c-di}$
Zähler und Nenner jeweils getrennt komplex konjugieren:	$\frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}}$
Zur Kurzschreibweise wechseln:	$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5.10 Konjugation einer Potenz

Satz

Man konjugiert eine Potenz, indem man die (komplexe) Basis konjugiert :

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beweisidee

Der Beweis erfolgt durch das wiederholte Anwenden der Formel für Produkte.

Beweis

Zerlege die Potenz:

$\overline{z^n} = \overline{z \cdot z^{n-1}}$

Wende den Satz für die Konjugation eines Produktes an:

$z = \bar{z} \cdot \overline{z^{n-1}}$

Wiederhole das Vorgehen: Zerlege die Potenz wieder in ein Produkt und wende wieder den Satz für Produkte an, bis keine Potenz mehr auftritt.

5.11 Doppelte Konjugation

Satz

Doppelte Konjugationen heben sich gegenseitig auf:

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Die Formel ist anhand der graphischen Darstellung unmittelbar einsichtig, da eine doppelte Konjugation einer doppelten Spiegelung an der reellen Achse entspricht. Wir beweisen die Formel aber auch rechnerisch:

Beweis

Gegeben:	$z = a + bi$	①
Wir konjugieren z. Konjugieren bedeutet, dass wir das Vorzeichen des Imaginärteils umdrehen müssen:	$\overline{z} = a - bi$	②
Wir konjugieren nochmal, d.h. wir müssen das Vorzeichen des Imaginärteils nochmal umdrehen:	$\overline{\overline{z}} = a + bi$	③
Durch Gleichsetzen von Gleichung ① und ③ ergibt sich der gewünschte Satz:	$z = \overline{\overline{z}}$	④

5.12 Betrag einer Konjugation

Satz

Eine komplexe Zahl z und ihre Konjugation haben den gleichen Betrag:

$$|z| = |\overline{z}|$$

Dies ist anhand der graphischen Darstellung unmittelbar einsichtig, da eine komplexe Zahl durch eine Konjugation (an der reellen Achse) gespiegeltt wird. Der Betrag ändert sich dabei aber nicht. Zusätzlich geben wir jetzt aber einen rechnerischen Beweis an:

Beweis

Gegeben sind die komplexen Zahlen $w = u + vi$ *und* $\bar{w} = u - vi$	$w = u + vi$ $\bar{w} = u - vi$	①
Der Betrag einer komplexen Zahl berechnet sich nach der Formel: $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *Wir berechnen zunächst den Betrag von w:*	$\|w\| = \sqrt{u^2 + v^2}$	②
Mit der gleichen Formel $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *berechnen wir den Betrag von* $\bar{w}$ *:*	$\|\bar{w}\| = \sqrt{u^2 + (-v)^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$	③
Durch Gleichsetzen von Gleichung ① und ③ ergibt sich der gewünschte Satz:	$\|w\| = \|\bar{w}\|$	④

5.13 Betrag eines Produktes

Satz

Der Betrag eines Produktes komplexer Zahlen ist gleich dem Produkt der Beträge:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Beweis

Gegeben :	$\|z \cdot w\|$
Wir wenden ein Wurzelgesetz für reelle Zahlen an: $\sqrt{\|x\|^2} = x$. *Dies dürfen wir, weil* $\|z \cdot w\|$ *ein Betrag ist, und Beträge sind reelle Zahlen:*	$\sqrt{\|z \cdot w\|^2}$
Die Formel $u \cdot \bar{u} = \|u\|^2$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w}}$
Die Formel $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}}$
Kommutativgesetz anwenden:	$\sqrt{z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}}$
Nochmal die Formel $u \cdot \bar{u} = \|u\|^2$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{\|z\|^2 \cdot \|w\|^2}$
Wir wenden eine Potenzgesetz für reelle Zahlen an: $x^n \cdot y^n = (xy)^n$. *Dies dürfen wir, weil hier Beträge vorliegen, und Beträge sind reelle Zahlen:*	$\sqrt{(\|z\| \cdot \|w\|)^2}$
Wir wenden ein Wurzelgesetz für reelle Zahlen an: $\sqrt{x^2} = x$ *für* $x \geq 0$. *Dies dürfen wir, weil* $\|z\| \cdot \|w\|$ *größer oder gleich Null ist, denn multipliziere ich zwei nicht-negative reelle Zahlen (z.B. Beträge), so ist das Ergebnis nicht-negativ.*	$\|z\| \cdot \|w\|$

5.14 Betrag eines Quotienten

Satz

Der Betrag eines Quotienten komplexer Zahlen ist gleich dem Quotienten der Beträge:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad w \neq 0$$

Beweis

Gegeben :	$\left\|\frac{z}{w}\right\|$
Wir wenden ein Wurzelgesetz für reelle Zahlen an: $\sqrt{\|x\|^2} = x$. *Dies dürfen wir, weil* $\left\|\frac{z}{w}\right\|$ *ein Betrag ist, und Beträge sind reelle Zahlen:*	$\sqrt{\left\|\frac{z}{w}\right\|^2}$
Die Formel $\|u\|^2 = u \cdot \bar{u}$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{\frac{z}{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}}$
Die Formel $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{\frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{w}}}$
Brüche multiplizieren:	$\sqrt{\frac{z\bar{z}}{w\bar{w}}}$
Im Zähler und Nenner jeweils die Formel $u \cdot \bar{u} = \|u\|^2$ *anwenden, die wir bereits kennengelernt haben:*	$\sqrt{\frac{\|z\|^2}{\|w\|^2}}$
Wir wenden eine Potenzgesetz für reelle Zahlen an: $\frac{x^n}{y^n} \cdot = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ *Dies dürfen wir, weil hier Beträge vorliegen, und Beträge sind reelle Zahlen:*	$\sqrt{\left(\frac{\|z\|}{\|w\|}\right)^2}$
Wir wenden ein Wurzelgesetz für reelle Zahlen an: $\sqrt{x^2} = x$ *für* $x \geq 0$. *Dies dürfen wir, weil* $\frac{\|z\|}{\|w\|}$ *größer oder gleich Null ist, denn dividiere ich zwei nicht-negative reelle Zahlen (z.B. Beträge), so ist das Ergebnis nicht-negativ.*	$\frac{\|z\|}{\|w\|}$

5.15 Ungleichung für den Betrag eines Realteils

Satz

Der Betrag des Realteils einer komplexen Zahl z ist kleiner oder gleich dem Betrag der komplexen Zahl z:

$$|Re(z)| \leq |z|$$

Beweis

Im folgenden Beweis gelte die Definition: $z = a+bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

Diese Ungleichung wollen wir beweisen:	$\|Re(z)\| \leq \|z\|$
Linke Seite: *Der Realteil von z ist laut Definition gleich a.* *Rechte Seite:* *Wir wenden die Formel für den Betrag einer komplexen Zahl z an:* $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\|a\| \leq \left\|\sqrt{a^2 + b^2}\right\|$
Rechte Seite: Weil eine Wurzel stets nicht-negativ ist, ist das Betragszeichen überflüssig	$\|a\| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
Linke Seite: *Wir wenden die Formel* $\|a\|=\sqrt{a^2}$ *an, die wir aus der Schulmathematik kennen*	$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
Wir quadrieren die Ungleichung. Hinweis: Quadrieren ist normalerweise keine Äquivalenzumformung für Ungleichungen, aber weil hier nur nicht-negative Werte quadriert werden (Wurzeln sind nicht-negativ), ist das Quadrieren hier doch eine Äquivalenzumformung	$a^2 \leq a^2 + b^2$
Wir subtrahieren auf beiden Seiten a^2*.* *Dies ist ein Äquivalenzumformung für Ungleichungen.*	$0 \leq b^2$

Die letzte Ungleichung ist stets wahr. Damit ist auch die gegebene Ungleichung wahr, die wir beweisen wollten, denn beide Ungleichungen sind ja äquivalent, da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben.

5.16 Ungleichung für den Betrag eines Imaginärteils

Satz

Der Betrag des Imaginärteils einer komplexen Zahl z ist kleiner oder gleich dem Betrag der komplexen Zahl z:

$$|Im(z)| \leq |z|$$

Beweis

Im folgenden Beweis gelte die Definition: $z = a+bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

Diese Ungleichung wollen wir beweisen:	$\|Im(z)\| \leq \|z\|$
Linke Seite: *Der Imaginärteil von z ist laut Definition gleich b.* *Rechte Seite:* *Wir wenden die Formel für den Betrag einer komplexen Zahl z an:* $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\|b\| \leq \left\|\sqrt{a^2 + b^2}\right\|$
Rechte Seite: Weil eine Wurzel stets nicht-negativ ist, ist das Betragszeichen überflüssig	$\|b\| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
Linke Seite: *Wir wenden die Formel* $\|b\|=\sqrt{b^2}$ *an, die wir aus der Schulmathematik kennen*	$\sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
Wir quadrieren die Ungleichung. Hinweis: Quadrieren ist normalerweise keine Äquivalenzumformung für Ungleichungen, aber weil hier nur nicht-negative Werte quadriert werden (Wurzeln sind nicht-negativ), ist das Quadrieren hier doch eine Äquivalenzumformung	$b^2 \leq a^2 + b^2$
Wir subtrahieren auf beiden Seiten b^2*.* *Dies ist ein Äquivalenzumformung für Ungleichungen.*	$0 \leq a^2$

Die letzte Ungleichung ist stets wahr. Damit ist auch die gegebene Ungleichung wahr, also Formel, die wir beweisen wollten, denn beide Ungleichungen sind ja äquivalent, da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben.

5.17 Realteil einer Summe/Differenz

Satz

Der Realteil einer Summe/Differenz zweier komplexer Zahlen ist gleich der Summe/Differenz der einzelnen Realteile der beiden komplexen Zahlen.

$$Re(z \pm w) = Re(z) \pm Re(w)$$

Beweis Summe

Diese Formel soll bewiesen werden:	$Re(z+w) = Re(z) + Re(w)$
Wir definieren: $z = a + bi$ *und* $w = c + di$ *:*	$Re[(a+bi)+(c+di)] = Re(a+bi\ ) + Re(c+di)$
Terme ordnen:	$Re[a+c+bi+di] = Re(a+bi\ ) + Re(c+di)$
Terme ordnen und "i" ausklammern:	$Re[(a+c)+i(b+d)] = Re(a+bi\ ) + Re(c+di)$
Auf beiden Seiten der Gleichung die Realteile bestimmen:	$a + c = a + c$

Beweis Differenz

Diese Formel soll bewiesen werden:	$Re(z-w)=Re(z)-Re(w)$
Wir definieren $z=a+bi$ *und* $w=c+di$ *:*	$Re\left[(a+bi)-(c+di)\right]=Re(a+bi\ )-Re(c+di)$
Klammer auflösen:	$Re[a+bi-c-di]=Re(a+bi\ )-Re(c+di)$
Terme ordnen:	$Re[a-c+bi-di]=Re(a+bi\ )-Re(c+di)$
i ausklammern:	$Re\left[a-c+i(b-d)\right]=Re(a+bi\ )-Re(c+di)$
Realteile auf beiden Seiten der Gleichung bestimmen :	$a-c=a-c$

5.18 Imaginärteil einer Summe/Differenz

Satz

Der Imaginärteil einer Summe/Differenz zweier komplexer Zahlen ist gleich der Summe/Differenz der einzelnen Imaginärteile:

$$Im(z \pm w) = Im(z) \pm Im(w)$$

Beweis Summe

Diese Formel soll bewiesen werden:	$Im(z+w) = Im(z) + Im(w)$
Wir definieren $z = a + bi$ *und* $w = c + di$ *:*	$Im[(a+bi)+(c+di)] = Im(a+bi\ ) + Im(c+di)$
Terme ordnen:	$Im[a+c+bi+di] = Im(a+bi\ ) + Im(c+di)$
Zusammenfassen und "i" ausklammern:	$Im[(a+c)+i(b+d)] = Im(a+bi\ ) + Im(c+di)$
Auf beiden Seiten der Gleichung die Imaginärteile bestimmen:	$b+d = b+d$

Beweis Differenz

Diese Formel soll bewiesen werden:	$Im(z-w)=Im(z)-Im(w)$
Wir definieren $z=a+bi$ *und* $w=c+di$ *:*	$Im\left[(a+bi)-(c+di)\right]=Im(a+bi\ )-Im(c+di)$
Klammer auflösen:	$Im\left[a+bi-c-di\right]=Im(a+bi\ )-Im(c+di)$
Terme ordnen:	$Im\left[a-c+bi-di\right]=Im(a+bi\ )-Im(c+di)$
i ausklammern:	$Im\left[a-c+i(b-d)\right]=Im(a+bi\ )-Im(c+di)$
Imaginärteile auf beiden Seiten der Gleichung bestimmen :	$b-d=b-d$

5.19 Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen

Satz

Auch für komplexe Zahlen gilt die (in der Analysis sehr wichtige) Dreiecksungleichung:

$$|z+w| \le |z|+|w| \qquad z,w \in \mathbb{C}$$

Beweis Teil 1 (Äquivalenzumformungen)

Zu beweisen:	$\|z+w\| \le \|z\|+\|w\|$
Quadriere beide Seiten! Quadrieren ist hier eine Äquivalenzumformung, weil beide Seite nichtnegativ sind.	$\|z+w\|^2 \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: $\|z\|^2 = z\cdot\bar{z}$	$(z+w)(\overline{z+w}) \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1}+\bar{z_2}$	$(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: Ausmultiplizieren	$z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: $w\bar{z} = \bar{\bar{w}}\cdot\bar{z} = \overline{(\bar{w})}\cdot\bar{z} = \overline{(\bar{w})\cdot z} = \overline{\bar{w}\cdot z} = \overline{z\cdot\bar{w}}$	$z\bar{z}+z\bar{w}+\overline{z\bar{w}}+w\bar{w} \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: $z+\bar{z} = 2\cdot Re(z)$	$z\bar{z}+2Re(z\bar{w})+w\bar{w} \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Linke Seite: $z\cdot\bar{z} = \|z\|^2$	$\|z\|^2+2Re(z\bar{w})+\|w\|^2 \le (\|z\|+\|w\|)^2$
Rechte Seite : Die 1.Binomische Formel anwenden oder von Hand ausmultiplizieren	$\|z\|^2+2Re(z\bar{w})+\|w\|^2 \le \|z\|^2+2\|z\|\|w\|+\|w\|^2$
Subtrahiere $\|z\|^2$ *und* $\|w\|^2$ *auf beiden Seiten der Ungleichung:*	$2Re(z\bar{w}) \le 2\|z\|\|w\|$
Ungleichung durch 2 dividieren :	$Re(z\bar{w}) \le \|z\|\|w\|$
Rechte Seite: $\|w\| = \|\bar{w}\|$	$Re(z\bar{w}) \le \|z\|\|\bar{w}\|$
Rechte Seite: $\|z\|\cdot\|w\| = \|z\cdot w\|$	$Re(z\bar{w}) \le \|z\bar{w}\|$

Wir haben eine neue Ungleichung erhalten, die äquivalent zur gegebenen Dreiecks – ungleichung ist, da wir bis jetzt nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben. Im zweiten Teil des Beweises werden wir diese neue Ungleichung durch eine Abschätzung beweisen, und somit auch die äquivalente (zu beweisende) Dreiecksungleichung.

Beweis Teil 2 (Abschätzung)

Diese neue Ungleichung wollen wir beweisen:	$Re(z\bar{w}) \le \lvert z\bar{w}\rvert$
Wir schreiben zunächst nur die linke Seite dieser zu beweisenden Ungleichung auf, und wollen durch Umformungen die rechte Seite erzeugen :	$Re(z\bar{w})$
Diese linke Seite der Ungleichung stellt eine reelle Zahl dar (Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reelle Zahlen). Für reelle Zahlen gilt aber: $x \le \lvert x\rvert$. Wir dürfen daher schreiben :	$Re(z\bar{w}) \le \lvert Re(z\bar{w})\rvert$
Auf die rechte Seite der Ungleichung kann eine Formel für komplexe Zahlen angewendet werden, die wir bereits bewiesen haben: $\lvert Re(z)\rvert \le \lvert z\rvert$ Wir können die Ungleichung daher ergänzen:	$Re(z\bar{w}) \le \lvert Re(z\bar{w})\rvert \le \lvert z\bar{w}\rvert$
Wir benutzen nun folgende Formel: $a \le b \le c \Rightarrow a \le c$ *Die Formel sagt aus: Wenn der linke Term in der Ungleichung kleiner/gleich dem mittleren Term der Ungleichung ist, und der mittlere Term der Ungleichung kleiner/gleich dem rechten Term der Ungleichung ist, dann ist der linke Term kleiner gleich dem rechten Term.* *Mathematisch ausgedrückt: Die Ordnungsrelation "kleiner/gleich" ist transitiv.*	$Re(z\bar{w}) \le \lvert z\bar{w}\rvert$

Wir haben genau die Formel erhalten, die wir am Ende von Teil 1 erhalten haben, und wie im Teil 1 erklärt wurde, ist dadurch auch die gegebene (äquivalente) Dreiecksungleichung bewiesen.

5.20 Eine Folgerung aus der Dreiecksungleichung

Satz

$$|z-w| \geq |z|-|w| \qquad z,w \in \mathbb{C}$$

Beweis

Wir beginnen mit der Dreiecksungleichung:	$\|z+w\| \leq \|z\|+\|w\|$
Als Summe auf der linken Seite wählen wir nicht $z+w$ sondern $z=(z-w)+w$:	$\|(z-w)+w\| \leq \|z-w\|+\|w\|$
Vereinfachen:	$\|z\| \leq \|z-w\|+\|w\|$
Wir bringen $\|w\|$ auf die andere Seite der Ungleichung (subtrahiere dazu $\|w\|$ auf beiden Seiten):	$\|z\|-\|w\| \leq \|z-w\|$
Vertausche dann die Seiten der Ungleichung:	$\|z-w\| \geq \|z\|-\|w\|$

5.21 Verständnisaufgabe

Aufgabe

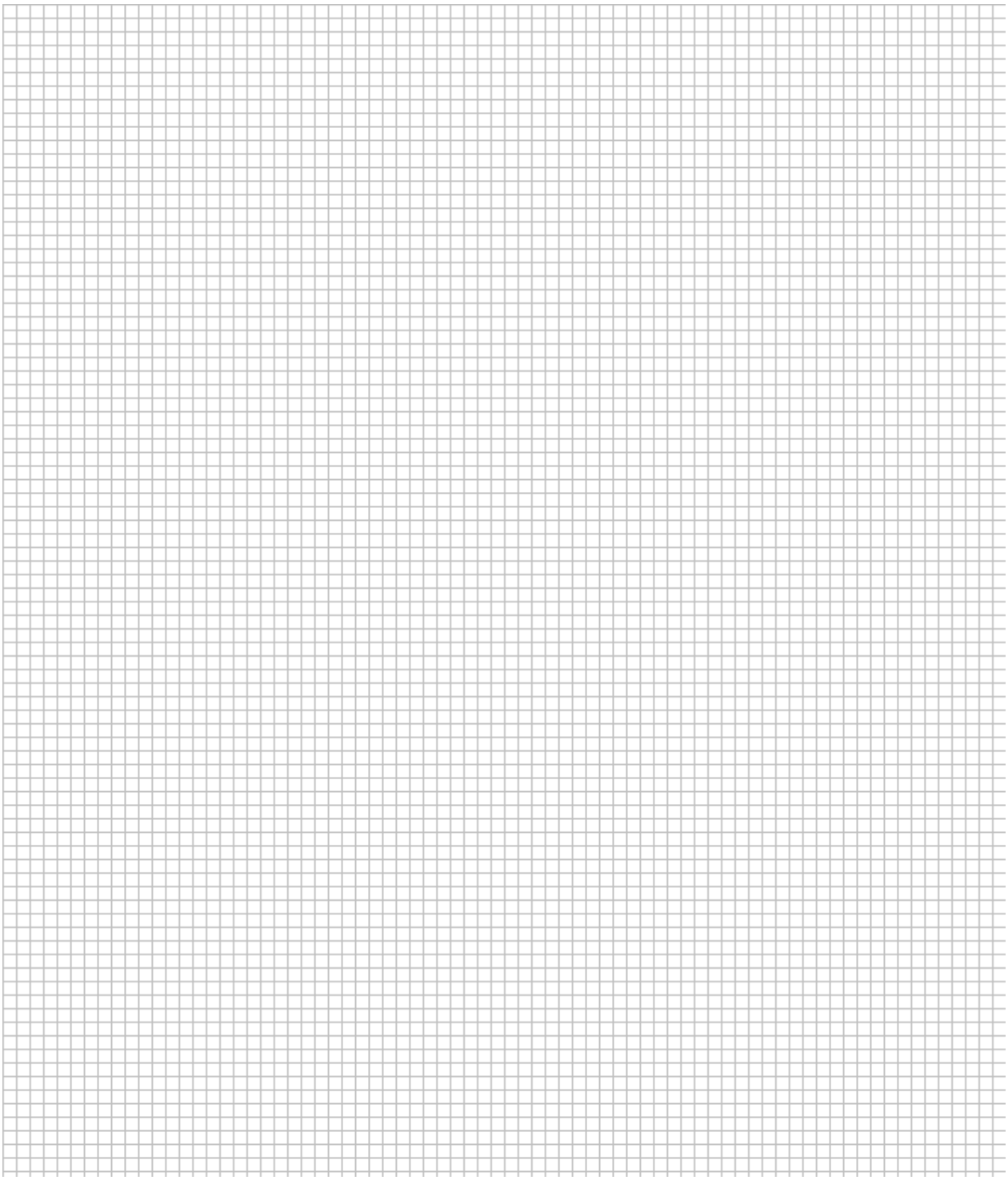
Wie lauten die Lösungen der Gleichung:

$$z = |\overline{z}| \cdot i$$

Lösung:

Gegebene Gleichung:	$z = \lvert\overline{z}\rvert \cdot i$
Wende den Satz an: $\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$z = \lvert z\rvert \cdot i$
Schreibe z ausführlich als $z = a + bi$*:*	$z = \lvert a + bi\rvert \cdot i$
Wende die Formel für den Betrag einer komplexen Zahl an: $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot i$
Nun überlege: Die Zahl auf der rechten Seite ist eine rein imaginäre Zahl mit der Wurzel als Koeffizienten von i. Folglich ist der Realteil von z gleich Null, und der Realteil ist ja a, denn wir haben oben definiert $z = a + bi$*. Also können wir den Realteil von z, nämlich a, weglassen:*	$z = \sqrt{b^2} \cdot i$
Vereinfachen:	$z = b \cdot i$
Lösung : Alle imaginären Zahlen bi erfüllen die gegebe Gleichung.	$L = \{ z \mid z = bi \}$

Probe:

Gegebene Gleichung:	$z = \lvert\overline{z}\rvert \cdot i$
Lösung bi (mit: $b \in \mathbb{R}$*) in Gleichung einsetzen:*	$bi = \lvert\overline{bi}\rvert \cdot i$
Wir haben gelernt: $\lvert z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert$	$bi = \lvert bi\rvert \cdot i$
Betrag einer imaginären Zahl ist gleich ihrem Imaginärteil:	$bi = bi$

5.22 Raum für eigene Ergänzungen