60.Differentialrechnung

60.1 Ableitungsregeln (Differentationsregeln)

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Beispiel:
Summenregel[1]:	$f \pm g$ f und g seien Funktionen	$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(x^2 + 5x)' =$ $(x^2)' + (5x)' =$ $2x + 5$
Konstanten-regel: Ableitung konstanter Funktionen	k k=Konstante	$(k)' = 0$	$(5000)' = 0$
Faktorregel: Ableitung eines konstanten Faktors	$k \cdot f$ k=Konstante f=Funktion	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	$(2 \cdot \sin x)' =$ $2 \cdot (\sin x)' =$ $2 \cdot \cos x$
Produktregel:	$f \cdot g$ f und g seien Funktionen	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(x^2 \cdot \sin x)' =$ $2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$
Quotientenregel	$\frac{f}{g}$ f und g seien Funktionen	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$
Kehrwertregel Sonderfall der Quotientenregel: Zähler =1	$\frac{1}{g}$ g sei eine Funktion	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{0 \cdot g - 1 \cdot g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
Kettenregel	$g(f(x))$ g sei eine Funktion der Funktion f(x)	$[g(f(x))]' =$ $g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$[\sin(x^2)]' = \cos(x^2) \cdot 2x$

[1] Die Summenregel gilt natürlich auch für mehr als 2 Summanden: $(f \pm g \pm h \pm ...)' = f' \pm g' \pm h' \pm ...$

60.Differentialrechnung

60.2 Ableitungen der Potenz und Wurzelfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Beispiel:
Potenzregel	x^n $mit\ n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2$
Sonderfall Quadratwurzel	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Ergibt sich aus der Potenzregel
Sonderfall Wurzel	$\sqrt[b]{x^a}$	$\frac{a}{b} \cdot \sqrt[b]{x^{a-b}}$	Ergibt sich aus der Potenzregel

60.3 Ableitung der Kehrwertfunktion

Achtung: Kehrwertfunktionen nicht mit inversen Funktionen verwechseln!

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Beispiel:
Allgemeiner Fall	$\frac{1}{g(x)}$	$-\frac{g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$	Spezialfall der Quotientenregel
Sonderfall: Nenner ist eine lineare Funktion	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	Ergibt sich aus der Quotientenregel und der Potenzregel, oder auch nur aus der Potenzregel
Sonderfall: Nenner ist eine Potenzfunktion	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$	Ergibt sich aus der Quotientenregel und der Potenzregel, oder auch nur aus der Potenzregel

60.Differentialrechnung

60.4 Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkungen:
Natürliche Exponentialfunktion (Basis = e ≈ 2.71828)	e^x	e^x	Die natürliche Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, bei der Funktion und Ableitung übereinstimmen
Exponent ist eine Funktion von x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	Folgt aus Kettenregel und Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion
"	e^{x+c}	e^{x+c}	"
"	$e^{b \cdot x}$	$e^{b \cdot x} \cdot b$	"
"	e^{bx+c}	$e^{bx+c} \cdot b$	"
"	$e^{\frac{x}{b}}$	$e^{\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{b}$	"
"	$e^{\left(x^2\right)}$	$e^{\left(x^2\right)} \cdot 2x$	"
"	$e^{\sqrt{x}}$	$e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$	"
"	$e^{\ln x} = x$	1	"
Produkt aus Konstante b und Exponentialfunktion	$b \cdot e^x$	$b \cdot e^x$	Folgt aus der Faktorregel
Produkt aus Funktion g(x) und Exponentialfunktion	$g(x) \cdot e^x$	$g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$	Folgt aus der Produktregel
Produkt aus Funktion g(x) und einer Exponentialfunktion mit der Funktion f(x) im Exponenten	$g(x) \cdot e^{f(x)}$	$g'(x) \cdot e^{f(x)} + g(x) \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)$	Folgt aus der Produktregel und der Kettenregel

60.Differentialrechnung

60.5 Ableitungen der allgemeinen Exponentialfunktion

Für die Basis a gelte: a>0

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkungen:
Allgemeine Exponentialfunktion	a^x	$\ln(a)\cdot a^x$	Beispiel: $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$
Exponent ist eine Funktion von x	$a^{f(x)}$	$\ln(a)\cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$	Folgt aus Kettenregel und Ableitung der Allgemeinen Exponentialfunktion
"	a^{x+b}	$\ln(a)\cdot a^{x+b}$	"
"	a^{bx}	$\ln(a)\cdot a^{bx}\cdot b$	"
"	a^{bx+c}	$\ln(a)\cdot a^{bx+c}\cdot b$	"
"	$a^{\frac{x}{b}}$	$\ln(a)\cdot a^{\frac{x}{b}}\cdot \frac{1}{b}$	"
"	$a^{(x^2)}$	$\ln(a)\cdot a^{(x^2)}\cdot 2x$	"
"	$a^{\sqrt{x}}$	$\ln(a)\cdot a^{\sqrt{x}}\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$	"
"	$a^{\ln x}$ x>0	$\ln(a)\cdot a^{\ln x}\cdot \frac{1}{x}$	"
Produkt aus Konstante b und Exponentialfunktion	$b\cdot a^x$	$b\cdot \ln(a)\cdot a^x$	Folgt aus der Faktorregel
Produkt aus Funktion g(x) und Exponentialfunktion	$g(x)\cdot a^x$	$g'(x)\cdot a^x + g(x)\cdot \ln(a)\cdot a^x$	Folgt aus der Produktregel
Produkt aus Funktion g(x) und einer Exponentialfunktion mit der Funktion f(x) im Exponenten	$g(x)\cdot a^{f(x)}$	$g'(x)\cdot a^{f(x)} + g(x)\cdot \ln(a)\cdot a^{f(x)}\cdot f'(x)$	Folgt aus der Produktregel und der Kettenregel

60.Differentialrechnung

60.6 Ableitungen der natürlichen Logarithmusfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkungen:
Natürliche Logarithmusfunktion (Basis = e ≈ 2.71828)	$\ln x$ $mit: \; x > 0$	$\frac{1}{x}$	Ergibt sich als Spezialfall der Ableitung der allgemeinen Logarithmusfuntion, und der Formel ln(e)=1
	$b \cdot \ln(x)$ $mit: \; x > 0$	$\frac{b}{x}$	Folgt aus der Faktorregel
Argument ist selbst wieder eine Funktion f von x	$\ln(f(x))$ $mit: \; f(x) > 0$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	Folgt aus der Kettenregel und der Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion
"	$\ln(bx)$ $mit: \; bx > 0$	$\frac{1}{bx} \cdot b = \frac{b}{bx} = \boxed{\frac{1}{x}}$	"
"	$\ln(bx+c)$ $mit: \; bx+c > 0$	$\frac{b}{bx+c} = \frac{1}{x+\frac{c}{b}}$	"

60.7 Ableitungen der allgemeinen Logarithmusfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkungen:
Allgemeine Logarithmusfunktion	$\log_a(x)$ a>0, a $\neq 1$, $x > 0$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	
	$b \cdot \log_a(x)$ a>0, a $\neq 1$, $x > 0$	$\frac{b}{x \cdot \ln a}$	Folgt aus der Faktorregel
Argument ist keine Variable x sondern selbst wieder eine Funktion f(x)	$\log_a(f(x))$ a>0, a $\neq 1$, f$(x) > 0$	$\frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$	Folgt aus der Kettenregel und der Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion
"	$\log_a(bx)$ a>0, a $\neq 1$, bx > 0	$\frac{b}{bx \cdot \ln a} = \boxed{\frac{1}{x \cdot \ln a}}$	"
"	$\log_a(bx+c)$ a>0, a $\neq 1$, bx+c > 0	$\frac{b}{(bx+c) \cdot \ln a}$	"

60.Differentialrechnung

60.8 Ableitung der Sinusfunktionen

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkung:
Sinusfunktion	$\sin x$	$\cos x$	
	$a \cdot \sin x$	$a \cdot \cos x$	Folgt aus Faktorregel
	$-\sin x$	$-\cos x$	Spezialfall der vorigen Regel: $-\sin x = -1 \cdot \sin x$
	$\sin^2 x = (\sin x)^2$	$2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ Wegen der Formel für doppelte Winkel aus der Trigonometrie darf man auch schreiben: $\sin(2x)$	Folgt aus der Kettenregel in Verbindung mit der Potenzregel oder aus Produktregel: ($\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$)
	$\sin^3 x = (\sin x)^3$	$3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$	Folgt aus der Kettenregel in Verbindung mit der Potenzregel
	$\sin^n x = (\sin x)^n$	$n \cdot \sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x)$	Folgt aus der Kettenregel in Verbindung mit der Potenzregel
Argument ist keine Variable x sondern selbst wieder eine Funktion f(x)	$\sin(f(x))$	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$	Folgt aus Kettenregel
"	$\sin(x+c)$	$\cos(x+c)$	"
"	$\sin(bx)$	$\cos(bx) \cdot b$	"
"	$\sin(bx+c)$	$\cos(bx+c) \cdot b$	"
"	$\sin(x^2)$	$\cos(x^2) \cdot 2x$	"
"	$\sin(x^n)$	$\cos(x^n) \cdot n \cdot x^{n-1}$	"
"	$\sin(\sqrt{x})$	$\cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$	"
"	$\sin(e^x)$	$\cos(e^x) \cdot e^x$	"
"	$\sin(a^x)$ a>0	$\cos(a^x) \cdot \ln(a) \cdot a^x$	"
"	$\sin(\ln x)$ x>0	$\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$	"

60.Differentialrechnung

60.9 Ableitung der Kosinusfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkung:
Kosinusfunktion	$\cos x$	$-\sin x$	
	$a\cdot\cos x$	$a\cdot(-\sin x)=-a\cdot\sin x$	Folgt aus Faktorregel
	$-\cos x$	$-(-\sin x)=\sin x$	Spezialfall der vorigen Regel: $-\cos x=-1\cdot\cos x$
	$\cos^2 x=(\cos x)^2$	$-2\cdot\sin x\cdot\cos x$ Wegen der Formel für doppelte Winkel aus der Trigonometrie darf man auch schreiben: $-\sin(2x)$	Folgt aus der Kettenregel in Verbindung mit der Potenzregel oder aus Produktregel: ($\cos^2 x = \cos x\cdot\cos x$)
	$\cos^3 x=(\cos x)^3$	$-3\cdot\cos^2(x)\cdot\sin(x)$	Folgt aus der Kettenregel in Verbindung mit der Potenzregel
Argument ist keine Variable x sondern selbst wieder eine Funktion f(x)	$\cos(\mathrm{f}(x))$	$-\sin(f(x))\cdot f'(x)$	Folgt aus Kettenregel
"	$\cos(x+c)$	$-\sin(x+c)$	"
"	$\cos(bx)$	$-\sin(bx)\cdot b$	"
"	$\cos(bx+c)$	$-\sin(bx+c)\cdot b$	"
"	$\cos(x^2)$	$-\sin(x^2)\cdot 2x$	"
"	$\cos(x^n)$	$-\sin(x^n)\cdot n\cdot x^{n-1}$	"
"	$\cos\sqrt{x}$	$-\sin(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$	"
"	$\cos(e^x)$	$-\sin(e^x)\cdot e^x$	"
"	$\cos(a^x)$ a>0	$-\sin(a^x)\cdot\ln(a)\cdot a^x$	"
"	$\cos(\ln x)$ x>0	$-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$	"

60.Differentialrechnung

60.10 Ableitung der Tangensfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkung:
Tangensfunktion	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} =$ oder: $1+\tan^2(x)$ Zur Umformung von Formel 1 in Formel 2 wurde der trigonometrische Pythagoras benutzt (siehe Trionometrie)	
2.Potenz	$\tan^2 x = (\tan x)^2$	$2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ oder: $2\left[1+\tan^2(x)\right]\tan x = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$	Folgt aus der Produktregel und der Formel: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ Folgt aus der Produktregel
n-te Potenz	$\tan^n x = (\tan x)^n$	$n(\tan x)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ oder: $n(\tan x)^{n-1} \cdot (1+\tan^2 x)$	Folgt aus der Kettenregel und der Potenzregel
Argument ist keine Variable x sondern selbst wieder eine Funktion (x)	$\tan(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$ oder: $\left[1+\tan^2(f(x))\right] \cdot f'(x)$	Folgt aus der Kettenregel
"	$\tan(b+x)$	$\frac{1}{\cos^2(b+x)}$ oder: $1+\tan^2(b+x)$	"
"	$\tan(bx)$	$\frac{b}{\cos^2(bx)}$ oder: $\left[1+\tan^2(bx)\right] \cdot b = b + b\tan^2(bx)$	"
"	$\tan(bx+c)$	$\frac{b}{\cos^2(bx+c)}$ oder: $\left[1+\tan^2(bx+c)\right] \cdot b = b + b\tan^2(bx+c)$	"

60.Differentialrechnung

60.11 Ableitung der Kotangensfunktion

Beschreibung:	Funktion:	Ableitung:	Anmerkung:
Kotangens-funktion	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$ oder: $-(1+\cot^2 x)$ Zur Umformung von Formel 1 in Formel 2 wurde der trigonometrische Pythagoras benutzt (siehe Trigonometrie)	
2.Potenz	$\cot^2 x = (\cot x)^2$	$-\frac{2\cdot\cot x}{\sin^2 x} = -2\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}$ oder: $-2\cdot(\cot x)\cdot\left[1+\cot^2(x)\right] = -2\cot(x) + 2\cot^3(x)$	Folgt aus der Produktregel und der Formel: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ Folgt aus der Produktregel
n-te Potenz	$\cot^n x = (\cot x)^n$	$n(\cot x)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ oder: $n(\cot x)^{n-1}\cdot(-1)\cdot(1+\cot^2 x)$	Folgt aus der Kettenregel und der Potenzregel
Argument ist keine Variable x sondern selbst wieder eine Funktion f(x)	$\cot(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$ oder: $-\left[1+\cot^2(f(x))\right]\cdot f'(x)$	Folgt aus der Kettenregel
"	$\cot(x+b)$	$-\frac{1}{\sin^2(x+b)}$ oder: $-\left[1+\cot^2(x+b)\right]$	"
"	$\cot(bx)$	$-\frac{b}{\sin^2(bx)}$ oder: $-\left[1+\cot^2(bx)\right]\cdot b = -b-b\cdot\cot^2(bx)$	"
"	$\cot(bx+c)$	$-\frac{b}{\sin^2(bx+c)}$ oder: $-\left[1+\cot^2(bx+c)\right]\cdot b = -b-b\cdot\cot^2(bx+c)$	"