Beweis: Absolut konvergente Reihen behalten beim Umordnen ihren Grenzwert

1

Gegeben sei eine absolut konvergente Reihe S und eine Umordnung von ihr, also eine Reihe P), die die gleichen Glieder hat, die aber an anderen Stellen stehen:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$
$$P = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots$$

Beispiel: $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$

$P = a_3 + a_2 + a_1 + a_6 + a_5 + a_4 + \dots$

Die Funktion, welche die Umordnungen (Permutationen) bewirkt, nennen wir π.

2

Nun bilden wir die <u>endlichen</u> Teilreihen S_n und P_m auf die folgende Art:
Die Reihe S_n besteht aus allen Glieder der gegebenen Reihe S bis zum Glied n.
Die Reihe P_m erhält man, indem man nacheinander die Glieder aus der umgeordneten Reihe P nimmt, bis alle Glieder von S_n in P_m enthalten sind:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$P_m = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(m)} \qquad a_3 + a_2 + a_1 + a_6 + a_5 + a_4$$

3

Am Beispiel erkennt man, dass P_m natürlich nicht nur die Glieder von S_n enthält, sondern stets noch einige zusätzliche Glieder, deren Wert wir Z nennen wollen:

$$\underbrace{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + \dots + a_{\pi(m)}}_{P_m} = \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}_{S_n} + \underbrace{(a_r + a_s + \dots + a_z)}_{Z}$$

$$\overbrace{a_3 + a_2 + a_1 + a_6 + a_5 + a_4} = \overbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} + \overbrace{(a_5 + a_6)}$$

Wir halten daher fest: $P_m = S_n + Z$

4

Die Beweisidee kann nun formuliert werden: Wir müssen beweisen, dass $Z=0$ (wenn $n \to \infty$), denn dann haben wir bewiesen, dass beide Reihen den gleichen Grenzwert haben.

5

Aus der Definitionsgleichung für z leiten wir eine Ungleichung für $|z|$ her:
Zuerst auf beiden Seiten Betragszeichen setzen. Dann ein Betragsgesetz anwenden ergibt:

$$z = a_r + a_s + \dots + a_z \Rightarrow |z| = |a_r + a_s + \dots + a_z| \Rightarrow |z| \le |a_r| + |a_s| + \dots + |a_z|$$

6

Nun definieren wir den Rest R_{n+1}, der entsteht, wenn man von den Gliedern der Reihe S die Beträge bildet und die ersten n Glieder abzieht:

$$R_{n+1} = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots$$
$$R_{4+1} = |a_5| + |a_6| + |a_7| + |a_8| + \dots$$

7

Zwischen $|Z|$ und R_{n+1} besteht folgender Zusammenhang:

$$|Z| \le R_{n+1}$$

denn alle Glieder $|Z| = |a_r| + |a_s| + \dots + |a_z|$ stammen ja aus der Reihe R_{n+1}. Dies erkennt man leicht am Beispiel:

$$\underbrace{|a_5| + |a_6|}_{|Z|} \le \underbrace{|a_5| + |a_6| + |a_7| + |a_8| + |a_9| + \dots}_{R_{n+1}}$$

8

$Z \le |Z|$

Der Betrag einer Zahl ist stets größer oder gleich der Zahl

9

Weil die Reihe S absolut konvergiert, existiert der Grenzwert:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots = \lim_{n\to\infty} \left(|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|\right)$$

Andererseits kann man die Reihe auch so ausdrücken

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + R_{n+1}$$

Gleichsetzen der beiden rechten Seiten ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|\right) = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + R_{n+1}$$

Auf der rechten Seite ist n frei wählbar. Lasse n gegen ∞ gehen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\right) = \lim_{n\to\infty} \left(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\right) + R_{n+1}$$

Subtrahiere $\lim_{n\to\infty} \left(|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|\right)$ auf beiden Seiten:

$R_{n+1} = 0 \quad (\text{wenn } n \to \infty)$, was zu beweisen war.

10

Wenn $n \to \infty$, dann gilt:

$$Z \le |Z| \le R_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow z = 0$$

$$P_m = S_n + Z$$
$$\wedge\ Z = 0 \quad (\text{wenn } n \to \infty)$$
$$\Rightarrow P_m = S_n \ (\text{wenn } n \to \infty)$$