

Übungen

Symmetrie

Thematisch geordnete Aufgaben
mit ausführlichem Lösungsweg

Vorab-Testversion vom 8.04.2007 / 17.00h

Übungen zum Kurs Symmetrie

1. Die folgenden Funktionen sind entweder ursprungssymmetrisch zum Ursprung oder achsensymmetrisch zur y-Achse. Beweise dies rechnerisch:

- a) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$
- b) $f(x) = x^8 - 3x^6 + 1$
- c) $f(x) = 2x^5 + 3x^7$
- d) $f(x) = 4x^6 + 7x^4 + 5$
- e) $f(x) = 3x^9 + 3x$
- f) $f(x) = 7x^5 + 2x^3$
- g) $f(x) = e^x + e^{-x}$
- h) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
- i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

2. Beweise, dass die angegebene Achse eine Symmetrieachse ist:

- a) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$ Achse: $x_0 = 1$
- b) $f(x) = 3x^2 + 24x + 48$ Achse: $x_0 = -4$
- c) $f(x) = \frac{3}{2x^2 - 8x + 8}$ Achse: $x_0 = 2$
- d) $f(x) = \frac{5}{3x^2 - 6x + 3}$ Achse: $x_0 = 1$
- e) $f(x) = e^{x^2 - 6x}$ Achse: $x_0 = 3$
- f) $f(x) = \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}}$ Achse: $x_0 = 1$

Übungen zum Kurs Symmetrie

3. Beweise, dass der angegebene Punkt ein Symmetriepunkt ist:

Man kann diese Aufgaben mit zwei verschiedenen Formeln lösen.

Es sind jeweils die Lösungswege für beide Formeln angegeben.

a) $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ $P(3,2)$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ $P(-1,1)$

c) $f(x) = \frac{4x-3}{x-1}$ $P(1,4)$

d) $f(x) = \frac{e^x + e}{e^x - e}$ $P(1,0)$

e) $f(x) = \frac{e^x + e^2}{e^x - e^2}$ $P(2,0)$

f) $f(x) = \frac{8e^3}{e^x + e^3}$ $P(3,4)$

g) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^7}$ $P\left(7, \frac{1}{2}\right)$

h) $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + e}$ $P(1,5)$

i) $f(x) = \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + e^4}$ $P(2,3)$

j) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ $P(1,2)$

k) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ $P(3,1)$

l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ $P(-1, -3)$

Übungen zum Kurs Symmetrie

4. Beweise, dass die folgenden Funktionenscharen (a und b sind Parameter) zum gegebenen Punkt P symmetrisch sind:

a) $f(x) = \frac{e^x + a}{e^x - a}$ $P(\ln a, 0)$

b) $f(x) = \frac{b}{e^x + a}$ $P\left(\ln a, \frac{b}{2a}\right)$

c) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + a}$ $P\left(\ln a, \frac{1}{2}\right)$

d) $f(x) = \frac{be^x}{e^x + a}$ $P\left(\ln a, \frac{b}{2}\right)$

e) $f(x) = \frac{be^{2x}}{e^{2x} + a}$ $P\left(\frac{\ln a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1a

Gegeben:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 2$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammern weg:

$$f(-x) = x^4 + 3x^2 - 2$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt.

Wir ersetzen daher die rechte Seite der Gleichung durch den Ausdruck $f(x)$:

$$f(-x) = f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1b

Gegeben:

$$f(x) = x^8 - 3x^6 + 1$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^8 - 3(-x)^6 + 1$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammern weg:

$$f(-x) = x^8 - 3x^6 + 1$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$f(-x) = f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1c

Gegeben:

$$f(x) = 2x^5 + 3x^7$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = 2(-x)^5 + 3(-x)^7$$

Beide Potenzen haben ungerade Exponenten, und für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$f(-x) = 2(-x^5) + 3(-x^7)$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$f(-x) = -2x^5 - 3x^7$$

Wir klammern -1 aus:

$$f(-x) = -(2x^5 + 3x^7)$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls ungerade (=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1d

Gegeben:

$$f(x) = 4x^6 + 7x^4 + 5$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = 4(-x)^6 + 7(-x)^4 + 5$$

Beide Potenzen haben gerade Exponenten, und daher fallen die Minuszeichen in den Klammern weg:

$$f(-x) = 4x^6 + 7x^4 + 5$$

Vergleicht man die rechte Seite mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die rechte Seite der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt:

$$f(-x) = f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für gerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1e

Gegeben:

$$f(x) = 3x^9 + 3x$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = 3(-x)^9 + 3(-x)$$

Die Potenz $(-x)^9$ hat einen ungeraden Exponenten

Für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$f(-x) = 3(-x^9) + 3(-x)$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$f(-x) = -3x^9 - 3x$$

Wir klammern -1 aus:

$$f(-x) = -(3x^9 + 3x)$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt. Wir ersetzen also die Klammer durch den Ausdruck $f(x)$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls ungerade (=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1f

Gegeben:

$$f(x) = 7x^5 + 2x^3$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = 7(-x)^5 + 2(-x)^3$$

Beide Potenzen haben einen ungeraden Exponenten.

Für solche Potenzen gilt aufgrund der Vorzeichenregeln: $(-x)^n = -x^n$

$$f(-x) = 7(-x^5) + 2(-x^3)$$

Jetzt kann man die Klammern auflösen:

$$f(-x) = -7x^5 - 2x^3$$

Wir klammern -1 aus:

$$f(-x) = -(7x^5 + 2x^3)$$

Vergleicht man die Klammer mit der gegebenen Gleichung, so erkennt man, dass die Klammer der Gleichung mit $f(x)$ übereinstimmt. Wir ersetzen also die Klammer durch den Ausdruck $f(x)$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.

Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls ungerade

(=punktsymmetrisch zum Ursprung).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1g

Gegeben:

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)}$$

Die beiden negativen Vorzeichen heben sich auf:

$$f(-x) = e^{-x} + e^x$$

Vergleicht man die rechte Seite der Gleichung mit der ursprünglichen Gleichung, so sieht man, dass die rechte Seite $f(x)$ entspricht. Wir ersetzen daher die rechte Seite durch den Ausdruck $f(x)$:

$$f(-x) = f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für eine gerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls gerade (=achsensymmetrisch zur y-Achse).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1h

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1}$$

Definition negativer Exponenten anwenden:

$$f(-x) = \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1}$$

Im Zähler und im Nenner jeweils auf den Hauptnenner bringen:

$$f(-x) = \frac{\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}} = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren):

$$f(-x) = \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{1-e^x}$$

Auf einen Buchstrich bringen:

$$f(-x) = \frac{(1+e^x)e^x}{e^x(1-e^x)}$$

Kürze e^x :

$$f(-x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

Im Nenner -1 ausklammern:

$$f(-x) = \frac{1+e^x}{-(e^x - 1)}$$

Minuszeichen vor den Bruchziehen:

$$f(-x) = -\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

Der Bruch entspricht $f(x)$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen.

Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls ungerade (= punktsymmetrisch zum Ursprung).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 1 i

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Lösungsweg:

Wir bestimmen $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{e^{-x} - e^{-(-x)}}$$

Vorzeichen vereinfachen:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x}$$

Im Nenner -1 ausklammern, im Zähler Reihenfolge verändern (Kommutativgesetz anwenden):

$$f(-x) = \frac{e^x + e^{-x}}{-(e^x - e^{-x})}$$

Das "Minus" vor der Klammer vor den Bruch schreiben :

$$f(-x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Der Bruch entspricht $f(x)$, daher den Bruch durch den Ausdruck $f(x)$ ersetzen :

$$f(-x) = -f(x)$$

Ergebnis:

Die letzte Gleichung ist die Formel für ungerade Funktionen. Die gegebene Funktion ist somit ebenfalls ungerade (= punktsymmetrisch zum Ursprung).

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2a

Gegeben:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad x_0 = 1$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x) &= 3(1+x)^2 - 6(1+x) + 3 \\ &= 3(1+2x+x^2) - 6 - 6x + 3 \\ &= 3 + 6x + 3x^2 - 6 - 6x + 3 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1-x) &= 3(1-x)^2 - 6(1-x) + 3 \\ &= 3(1-2x+x^2) - 6 + 6x + 3 \\ &= 3 - 6x + 3x^2 - 6 + 6x + 3 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 3 &= 3(2 \cdot 1 - x)^2 - 6(2 \cdot 1 - x) + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3(2 - x)^2 - 6(2 - x) + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3(4 - 4x + x^2) - 12 + 6x + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 12 - 12x + 3x^2 - 12 + 6x + 3 \\ 3x^2 - 6x + 3 &= 3x^2 - 6x + 3 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2b

Gegeben:

$$f(x) = 3x^2 + 24x + 48 \quad \text{und} \quad x_0 = -4$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(-4+x) &= 3(-4+x)^2 + 24(-4+x) + 48 \\ &= 3(16 - 8x + x^2) - 96 + 24x + 48 \\ &= 48 - 24x + 3x^2 - 96 + 24x + 48 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-4-x) &= 3(-4-x)^2 + 24(-4-x) + 48 \\ &= 3(16 + 8x + x^2) - 96 - 24x + 48 \\ &= 48 + 24x + 3x^2 - 96 - 24x + 48 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = -4$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 24x + 48 &= 3(2 \cdot (-4) - x)^2 + 24(2 \cdot (-4) - x) + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3(-8 - x)^2 + 24(-8 - x) + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3(64 + 16x + x^2) - 192 - 24x + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 192 + 48x + 3x^2 - 192 - 24x + 48 \\ 3x^2 + 24x + 48 &= 3x^2 + 24x + 48 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind,
ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = -4$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2c

Gegeben:

$$f(x) = \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} \quad \text{und} \quad x_0 = 2$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(2+x) &= \frac{3}{2(2+x)^2 - 8(2+x) + 8} \\ &= \frac{3}{2(4+4x+x^2) - 16 - 8x + 8} \\ &= \frac{3}{8+8x+2x^2 - 16 - 8x + 8} \\ &= \frac{3}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{3}{2(2-x)^2 - 8(2-x) + 8} \\ &= \frac{3}{2(2-x)^2 - 16 + 8x + 8} \\ &= \frac{3}{8-8x+2x^2 - 16 + 8x + 8} \\ &= \frac{3}{2x^2} \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 2$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(2 \cdot 2 - x)^2 - 8(2 \cdot 2 - x) + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(4 - x)^2 - 8(4 - x) + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(4 - x)^2 - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2(16 - 8x + x^2) - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{32 - 16x + 2x^2 - 32 + 8x + 8} \\ \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} &= \frac{3}{2x^2 - 8x + 8} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 2$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2d

Gegeben:

$$f(x) = \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} \quad \text{und} \quad x_0 = 1$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Wir berechnen $f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x) &= \frac{5}{3(1+x)^2 - 6(1+x) + 3} \\ &= \frac{5}{3(1+x)^2 - 6 - 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3(1+2x+x^2) - 6 - 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3+6x+3x^2 - 6 - 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{5}{3(1-x)^2 - 6(1-x) + 3} \\ &= \frac{5}{3(1-x)^2 - 6 + 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3(1-2x+x^2) - 6 + 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3-6x+3x^2 - 6 + 6x + 3} \\ &= \frac{5}{3x^2} \end{aligned}$$

$f(x_0 + x)$ und $f(x_0 - x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0 = 1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0 - x)$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{3(2 \cdot 1 - x)^2 - 6(2 \cdot 1 - x) + 3} \\ \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{3(2-x)^2 - 6(2-x) + 3} \\ \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{3(2-x)^2 - 12 + 6x + 3} \\ \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{3(4-4x+x^2) - 12 + 6x + 3} \\ \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{12-12x+3x^2 - 12 + 6x + 3} \\ \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} &= \frac{5}{3x^2 - 6x + 3} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2e

Gegeben:

$$f(x) = e^{x^2-6x} \quad \text{und} \quad x_0 = 3$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$.
Wir berechnen $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(3+x) &= e^{(3+x)^2-6(3+x)} \\ &= e^{(9+6x+x^2)-6(3+x)} \\ &= e^{9+6x+x^2-18-6x} \\ &= e^{x^2-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3-x) &= e^{(3-x)^2-6(3-x)} \\ &= e^{(9-6x+x^2)-6(3-x)} \\ &= e^{9-6x+x^2-18+6x} \\ &= e^{x^2-9} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich zu $x_0=3$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

$$\begin{aligned} e^{x^2-6x} &= e^{(2\cdot 3-x)^2-6(2\cdot 3-x)} \\ e^{x^2-6x} &= e^{(6-x)^2-6(6-x)} \\ e^{x^2-6x} &= e^{(36-12x+x^2)-36+6x} \\ e^{x^2-6x} &= e^{36-12x+x^2-36+6x} \\ e^{x^2-6x} &= e^{x^2-6x} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 3$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 2f

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} \quad \text{und} \quad x_0 = 1$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) = f(x_0-x)$.

Wir berechnen $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ und vergleichen beide Werte:

$\begin{aligned} f(1+x) &= \frac{e^{2(1+x)} + e^2}{e^{(1+x)+1}} \\ &= \frac{e^{2+2x} + e^2}{e^{x+2}} \\ &= \frac{e^2 e^{2x} + e^2}{e^2 e^x} \\ &= \frac{e^2 (e^{2x} + 1)}{e^2 e^x} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} f(1-x) &= \frac{e^{2(1-x)} + e^2}{e^{(1-x)+1}} = \frac{e^{2-2x} + e^2}{e^{2-x}} \\ &= \frac{e^2 e^{-2x} + e^2}{e^2 e^{-x}} = \frac{e^2 (e^{-2x} + 1)}{e^2 e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-2x} + 1}{e^{-x}} = \frac{(e^{-2x} + 1) \cdot e^{2x}}{e^{-x} \cdot e^{2x}} \\ &= \frac{e^{-2x} e^{2x} + e^{2x}}{e^{-x} \cdot e^{2x}} = \frac{1 + e^{2x}}{e^x} \end{aligned}$
--	--

$f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ sind gleich, also ist die Funktion wirklich zu $x_0=1$ symmetrisch.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = f(2x_0-x)$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^{2(2-x)} + e^2}{e^{(2-x)+1}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^{4-2x} + e^2}{e^{3-x}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^4 e^{-2x} + e^2}{e^3 e^{-x}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^2 (e^2 e^{-2x} + 1)}{e^3 e^{-x}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^2 e^{-2x} + 1}{e e^{-x}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{(e^{2-2x} + 1) e^{2x}}{(e e^{-x}) e^{2x}} \\ \frac{e^{2x} + e^2}{e^{x+1}} &= \frac{e^2 + e^{2x}}{e^{x+1}} \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist die Symmetrie zur Achse $x_0 = 1$ bewiesen.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3a - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} \quad \text{und} \quad P=(3,2)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$

Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(3+x)-2 &= \frac{2(3+x)-5}{(3+x)-3} - 2 && \text{Klammern auflösen} \\ &= \frac{6+2x-5}{x} - 2 && \text{vereinfachen} \\ &= \frac{2x+1}{x} - 2 && \text{gleichnamige Brüche erzeugen} \\ &= \frac{2x+1}{x} - \frac{2x}{x} && \text{Brüche subtrahieren} \\ &= \frac{2x+1-2x}{x} && \text{vereinfachen} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(3-x)+2 &= -\frac{2(3-x)-5}{(3-x)-3} + 2 && \text{Klammern auflösen} \\ &= -\frac{6-2x-5}{-x} + 2 && \text{vereinfachen} \\ &= -\frac{1-2x}{-x} + 2 && \text{Minuszeichen in Nenner bringen} \\ &= \frac{1-2x}{-(-x)} + 2 && \text{Klammer auflösen} \\ &= \frac{1-2x}{x} + 2 && \text{gleichnamige Brüche erzeugen} \\ &= \frac{1-2x}{x} + \frac{2x}{x} && \text{Brüche addieren} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(3/2)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3a - Lösungsvariante 2

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$
Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen,
ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{2x-5}{x-3} = 2 \cdot 2 - \frac{2(6-x)-5}{(6-x)-3}$	vereinfachen und Klammern auflösen
$= 4 - \frac{7-2x}{3-x}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{4(3-x)}{3-x} - \frac{7-2x}{3-x}$	Klammer auflösen
$= \frac{12-4x}{3-x} - \frac{7-2x}{3-x}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{12-4x-(7-2x)}{3-x}$	Klammer auflösen
$= \frac{12-4x-7+2x}{3-x}$	vereinfachen
$= \frac{5-2x}{3-x}$	Bruch mit -1 erweitern
$\frac{2x-5}{x-3} = \frac{2x-5}{x-3}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(3/2)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3b - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad \text{und} \quad P=(-1,1)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$

Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(-1+x)-1 &= \frac{(-1+x)+2}{(-1+x)+1} - 1 && \text{Klammern auflösen} \\ &= \frac{x+1}{x} - 1 && \text{gleichnamige} \\ & && \text{Brüche erzeugen} \\ &= \frac{x+1}{x} - \frac{1x}{x} && \text{Bruch subtrahieren} \\ &= \frac{x+1-x}{x} && \text{vereinfachen} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(-1-x)+1 &= -\frac{(-1-x)+2}{(-1-x)+1} + 1 && \text{vereinfachen} \\ &= -\frac{1-x}{-x} + 1 && \text{Minuszeichen in den} \\ & && \text{Nenner bringen} \\ &= \frac{1-x}{-(-x)} + 1 && \text{Klammer} \\ & && \text{beseitigen} \\ &= \frac{1-x}{x} + 1 && \text{in gleichnamige} \\ & && \text{Brüche umwandeln} \\ &= \frac{1-x}{x} + \frac{1x}{x} && \text{Brüche addieren} \\ & && \text{und vereinfachen} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(-1/1)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3b - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad \text{und} \quad P(-1,1)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen,

ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{x+2}{x+1} = 2 \cdot 1 - \frac{(-2-x)+2}{(-2-x)+1}$	Klammern auflösen und vereinfachen
$= 2 - \frac{-x}{-1-x}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{2(-1-x)}{-1-x} - \frac{-x}{-1-x}$	subtrahieren
$= \frac{2(-1-x)+x}{-1-x}$	Klammer auflösen
$= \frac{-2-2x+x}{-1-x}$	vereinfachen
$= \frac{-2-x}{-1-x}$	Bruch mit -1 erweitern
$\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,
dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(-1/1)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3c - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-1} \quad \text{und} \quad P=(1,4)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$.
Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x)-4 &= \frac{4(1+x)-3}{(1+x)-1} - 4 && \text{Klammern auflösen} \\ &= \frac{4+4x-3}{1+x-1} - 4 && \text{vereinfachen} \\ &= \frac{1+4x}{x} - 4 && \text{auf gleichen Nenner} \\ &= \frac{1+4x-4x}{x} && \text{vereinfachen} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(1-x)+4 &= -\left[\frac{4(1-x)-3}{(1-x)-1} \right] + 4 && \text{Klammern auflösen} \\ &= -\left[\frac{4-4x-3}{-x} \right] + 4 && \text{vereinfachen} \\ &= -\left[\frac{1-4x}{-x} \right] + 4 && \text{Minuszeichen in} \\ &= -\frac{1-4x}{-(-x)} + 4 && \text{den Nenner bringen} \\ &= \frac{1-4x}{x} + 4 && \text{Nenner vereinfachen} \\ &= \frac{1-4x}{x} + \frac{4x}{x} && \text{gleichnamig machen} \\ &= \frac{1-4x+4x}{x} && \text{Brüche addieren} \\ &= \frac{1}{x} && \text{vereinfachen} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(1/4)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3c - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{4x-3}{x-1} \quad \text{und} \quad P=(1,4)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{4x-3}{x-1} = 2 \cdot 4 - \frac{4(2 \cdot 1 - x) - 3}{(2 \cdot 1 - x) - 1}$	vereinfachen
$= 8 - \frac{4(2-x)-3}{2-x-1}$	Klammer im Zähler ausmultiplizieren Nenner vereinfachen
$= 8 - \frac{8-4x-3}{1-x}$	vereinfachen
$= 8 - \frac{5-4x}{1-x}$	Auf gemeinsamen Nenner bringen
$= \frac{8(1-x)}{1-x} - \frac{5-4x}{1-x}$	Klammer ausmultiplizieren
$= \frac{8-8x}{1-x} - \frac{5-4x}{1-x}$	auf einen Bruch bringen
$= \frac{8-8x-(5-4x)}{1-x}$	Klammer auflösen
$= \frac{8-8x-5+4x}{1-x}$	vereinfachen
$= \frac{3-4x}{1-x}$	Zähler und Nenner mit -1 erweitern
$\frac{4x-3}{x-1} = \frac{4x-3}{x-1}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(1/4)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3d - Lösungsvariante 1

Gegeben: $f(x) = \frac{e^x + e}{e^x - e}$ und $P=(1,0)$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x)-0 &= \frac{e^{(1+x)} + e}{e^{(1+x)} - e} && \text{Potenzgesetz} \\ &= \frac{ee^x + e}{ee^x - e} && \text{e ausklammern} \\ &= \frac{e(e^x + 1)}{e(e^x - 1)} && \text{Kürze : e} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(1-x)+0 &= -\frac{e^{(1-x)} + e}{e^{(1-x)} - e} && \text{Potenzgesetz} \\ &= -\frac{ee^{-x} + e}{ee^{-x} - e} && \text{e ausklammern} \\ &= -\frac{e(e^{-x} + 1)}{e(e^{-x} - 1)} && \text{Kürze : e} \\ &= -\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} && \text{Definition negativer Exponenten anwenden} \\ &= -\frac{1}{e^x} + 1 && \text{mit } e^x \text{ erweitern} \\ &= -\frac{1}{e^x - 1} \\ &= -\frac{\frac{e^x}{e^x} + e^x}{\frac{e^x}{e^x} - e^x} && \text{kürzen} \\ &= -\frac{1 + e^x}{1 - e^x} && \text{Minuszeichen in den Nenner} \\ &= \frac{1 + e^x}{-(1 - e^x)} && \text{Klammer auflösen} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(1/0)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3d - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + e}{e^x - e} \quad \text{und} \quad P=(1,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x + e}{e^x - e} = 2 \cdot 0 - \frac{e^{2-x} + e}{e^{2-x} - e}$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= -\frac{\frac{e^2}{e^x} + e}{\frac{e^2}{e^x} - e}$	gleichnamige Brüche erzeugen
$= -\frac{\frac{e^2}{e^x} + \frac{ee^x}{e^x}}{\frac{e^2}{e^x} - \frac{ee^x}{e^x}}$	Brüche addieren bzw. subtrahieren
$= -\frac{\frac{e^2 + ee^x}{e^x}}{\frac{e^2 - ee^x}{e^x}}$	Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= -\frac{e^2 + ee^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^2 - ee^x}$	Kürze : e^x
$= -\frac{e^2 + ee^x}{e^2 - ee^x} =$	e ausgeklammern
$= -\frac{e(e + e^x)}{e(e - e^x)}$	e kürzen
$= -\frac{e + e^x}{e - e^x}$	Minus in den Nenner bringen
$= \frac{e + e^x}{-(e - e^x)}$	Klammer auflösen
$\frac{e^x + e}{e^x - e} = \frac{e^x + e}{e^x - e}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(1/0)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3e - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + e^2}{e^x - e^2} \quad \text{und} \quad P=(2,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(2+x)-0 &= \frac{e^{(2+x)} + e^2}{e^{(2+x)} - e^2} && \text{Potenz-} \\ & && \text{gesetz} \\ & && \text{anwenden} \\ &= \frac{e^2 e^x + e^2}{e^2 e^x - e^2} && \text{Klammere} \\ & && \text{e}^2 \text{ aus} \\ &= \frac{e^2 (e^x + 1)}{e^2 (e^x - 1)} && \text{Kürze : } e^2 \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(2-x)+0 &= -\frac{e^{(2-x)} + e^2}{e^{(2-x)} - e^2} && \text{Potenzgesetz} \\ & && \text{anwenden} \\ &= -\frac{e^2 e^{-x} + e^2}{e^2 e^{-x} - e^2} && e^2 \text{ ausklammern} \\ &= -\frac{e^2 (e^{-x} + 1)}{e^2 (e^{-x} - 1)} && \text{kürze : } e^2 \\ &= -\frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1} && \text{Bruch mit } e^x \\ & && \text{erweitern} \\ &= -\frac{\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) \cdot e^x}{\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) \cdot e^x} && \text{ausmultiplizieren} \\ &= -\frac{\frac{e^x}{e^x} + e^x}{\frac{e^x}{e^x} - e^x} && \text{kürzen} \\ &= -\frac{1 + e^x}{1 - e^x} && \text{Minuszeichen in} \\ & && \text{Nenner bringen} \\ &= \frac{1 + e^x}{-(1 - e^x)} && \text{Klammer auflösen} \\ &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(2/0)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3e - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + e^2}{e^x - e^2} \quad \text{und} \quad P=(2,0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x + e^2}{e^x - e^2} = 2 \cdot 0 - \frac{e^{2 \cdot 2 - x} + e^2}{e^{2 \cdot 2 - x} - e^2}$	Defintion negativer Exponenten anwenden
$= - \frac{\frac{e^4}{e^x} + e^2}{\frac{e^4}{e^x} - e^2}$	gleichnamig machen
$= - \frac{\frac{e^4}{e^x} + \frac{e^2 e^x}{e^x}}{\frac{e^4}{e^x} - \frac{e^2 e^x}{e^x}}$	Brüche addieren bzw. subtrahieren
$= - \frac{\frac{e^4 + e^2 e^x}{e^x}}{\frac{e^4 - e^2 e^x}{e^x}}$	Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren).
$= - \frac{e^4 + e^2 e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^4 - e^2 e^x}$	Kürze e^x
$= - \frac{e^4 + e^2 e^x}{e^4 - e^2 e^x} =$	e^2 ausgeklammern
$= - \frac{e^2 (e^2 + e^x)}{e^2 (e^2 - e^x)}$	Kürze e^2
$= - \frac{e^2 + e^x}{e^2 - e^x}$	Minus in den Nenner bringen
$= \frac{e^2 + e^x}{-(e^2 - e^x)}$	Im Zähler die Reihenfolge vertauschen und im Nenner die Klammer auflösen
$\frac{e^x + e^2}{e^x - e^2} = \frac{e^x + e^2}{e^x - e^2}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(2/0)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3f - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{8}{e^x + e^3} \quad \text{und} \quad P=(3,4)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$
Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$f(3+x) - 4 = \frac{8e^3}{e^{3+x} + e^3} - 4$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{8e^3}{e^3e^x + e^3} - 4$	gleichnamig machen
$= \frac{8e^3}{e^3e^x + e^3} - \frac{4(e^3e^x + e^3)}{e^3e^x + e^3}$	Klammer auflösen
$= \frac{8e^3}{e^3e^x + e^3} - \frac{4e^3e^x + 4e^3}{e^3e^x + e^3}$	Brüche subtrahieren
$= \frac{8e^3 - (4e^3e^x + 4e^3)}{e^3e^x + e^3}$	Klammer auflösen
$= \frac{8e^3 - 4e^3e^x - 4e^3}{e^3e^x + e^3}$	e^3 ausklammern
$= \frac{e^3(8 - 4e^x - 4)}{e^3(e^x + 1)}$	e^3 kürzen
$= \frac{8 - 4e^x - 4}{e^x + 1}$	vereinfachen
$= \frac{4 - 4e^x}{e^x + 1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(3-x)+4 = -\frac{8e^3}{e^{3-x}+e^3}+4$	Potenzdefinition anwenden
$= -\frac{8e^3}{\frac{e^3}{e^x}+e^3}+4$	Bei Brüchen im Nenner auf Hauptnenner bringen
$= -\frac{8e^3}{\frac{e^3}{e^x}+\frac{e^x e^3}{e^x}}+4$	Brüche im Nenner zusammenfassen
$= -\frac{8e^3}{\frac{e^3+e^x e^3}{e^x}}+4$	Doppelbruch beseitigen und e^3 kürzen
$= -\frac{8e^x}{1+e^x}+4$	auf Hauptnenner bringen
$= -\frac{8e^x}{1+e^x}+\frac{4(1+e^x)}{1+e^x}$	Reihenfolge der Brüche ändern
$= \frac{4(1+e^x)}{1+e^x}-\frac{8e^x}{1+e^x}$	Klammer auflösen
$= \frac{4+4e^x}{1+e^x}-\frac{8e^x}{1+e^x}$	Brüche zusammenfassen
$= \frac{4+4e^x-8e^x}{1+e^x}$	vereinfachen
$= \frac{4-4e^x}{1+e^x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(3/4)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3f - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{8e^3}{e^x + e^3} \quad \text{und} \quad P=(3,4)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{8e^3}{e^x + e^3} = 2 \cdot 4 - \frac{8e^3}{e^{6-x} + e^3}$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= 8 - \frac{8e^3}{\frac{e^6}{e^x} + e^3}$	auf gleichen Nenner bringen
$= 8 - \frac{8e^3}{\frac{e^6}{e^x} + \frac{e^3 e^x}{e^x}}$	Die beiden Brüche im Nenner addieren
$= 8 - \frac{8e^3}{\frac{e^6 + e^3 e^x}{e^x}}$	Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= 8 - \frac{8e^3 e^x}{e^6 + e^3 e^x}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{8(e^6 + e^3 e^x)}{e^6 + e^3 e^x} - \frac{8e^3 e^x}{e^6 + e^3 e^x}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{8e^6 + 8e^3 e^x - 8e^3 e^x}{e^6 + e^3 e^x}$	vereinfachen
$= \frac{8e^6}{e^6 + e^3 e^x}$	e^3 ausklammern
$= \frac{8e^3 e^3}{e^3 (e^3 + e^x)}$	e^3 kürzen
$\frac{8e^3}{e^x + e^3} = \frac{8e^3}{e^3 + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(3/4)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3g - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^7} \quad \text{und} \quad P = \left(7, \frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$.
Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen dann beide Werte:

$f(7+x) - 0.5 = \frac{e^{7+x}}{e^{7+x} + e^7} - 0.5$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{e^7 e^x}{e^7 e^x + e^7} - 0.5$	e^7 ausklammern
$= \frac{e^7 e^x}{e^7 (e^x + 1)} - 0.5$	e^7 kürzen
$= \frac{e^x}{e^x + 1} - 0.5$	gleichnamig machen
$= \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{0.5(e^x + 1)}{e^x + 1}$	subtrahieren
$= \frac{e^x - 0.5(e^x + 1)}{e^x + 1}$	Klammer auflösen
$= \frac{e^x - 0.5e^x - 0.5}{e^x + 1}$	vereinfachen
$= \frac{0.5e^x - 0.5}{e^x + 1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(7-x) + 0.5 = -\frac{e^{7-x}}{e^{7-x} + e^7} + 0.5$	Potenzdefinition anwenden
$= -\frac{\frac{e^7}{e^x}}{\frac{e^7}{e^x} + e^7} + 0.5$	gleichnamig machen
$= -\frac{\frac{e^7}{e^x}}{\frac{e^7}{e^x} + \frac{e^7 e^x}{e^x}} + 0.5$	Brüche addieren
$= -\frac{\frac{e^7}{e^x}}{\frac{e^7 + e^7 e^x}{e^x}} + 0.5$	Doppelbruch beseitigen (Mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= -\frac{e^7}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^7 + e^7 e^x} + 0.5$	Kürze : e^x
$= -\frac{e^7}{e^7 + e^7 e^x} + 0.5$	Reihenfolge vertauschen
$= 0.5 - \frac{e^7}{e^7 + e^7 e^x}$	e^7 ausklammern
$= 0.5 - \frac{e^7}{e^7(1 + e^x)}$	Kürze e^7
$= 0.5 - \frac{1}{1 + e^x}$	gleichnamig machen
$= \frac{0.5(1 + e^x)}{1 + e^x} - \frac{1}{1 + e^x}$	Klammer auflösen
$= \frac{0.5 + 0.5e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{1 + e^x}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{0.5 + 0.5e^x - 1}{1 + e^x}$	vereinfachen
$= \frac{0.5e^x - 0.5}{1 + e^x}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(7/\frac{1}{2})$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3g - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^7} \quad \text{und} \quad P = \left(7, \frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x}{e^x + e^7} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{e^{2 \cdot 7 - x}}{e^{2 \cdot 7 - x} + e^7}$	vereinfachen
$= 1 - \frac{e^{14-x}}{e^{14-x} + e^7}$	Definition der Potenz
$= 1 - \frac{e^{14}}{\frac{e^x}{e^{14}} + e^7}$	Nenner : Brüche auf Hauptnenner bringen
$= 1 - \frac{e^{14}}{\frac{e^x}{e^{14}} + \frac{e^7 e^x}{e^x}}$	Brüche zusammenführen
$= 1 - \frac{e^{14}}{\frac{e^x + e^7 e^x}{e^{14}}}$	Doppelbruch beseitigen
$= 1 - \frac{e^{14}}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^{14} + e^7 e^x}$	Kürze e^x
$= 1 - \frac{e^{14}}{e^{14} + e^7 e^x}$	Kürze e^7
$= 1 - \frac{e^7}{e^7 + e^x}$	Die Zahl 1 erweitern
$= \frac{e^7 + e^x}{e^7 + e^x} - \frac{e^7}{e^7 + e^x}$	Brüche zusammenführen
$= \frac{e^7 + e^x - e^7}{e^7 + e^x}$	vereinfachen
$\frac{e^x}{e^x + e^7} = \frac{e^x}{e^7 + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(7/\frac{1}{2})$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3h - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{10e^x}{e^x + e} \quad \text{und} \quad P = (1,5)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$.
Wir berechnen $f(x_0+x) - y_0$ und $-f(x_0-x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$f(1+x) - 5 = \frac{10e^{1+x}}{e^{1+x} + e} - 5$	Potenzgesetz
$= \frac{10ee^x}{ee^x + e} - 5$	Kürze e
$= \frac{10e^x}{e^x + 1} - 5$	gleichnamig machen
$= \frac{10e^x}{e^x + 1} - \frac{5(e^x + 1)}{e^x + 1}$	Klammer auflösen
$= \frac{10e^x}{e^x + 1} - \frac{5e^x + 5}{e^x + 1}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{10e^x - 5e^x - 5}{e^x + 1}$	vereinfachen
$= \frac{5e^x - 5}{e^x + 1}$	

$-f(1-x) + 5 = -\frac{10e^{1-x}}{e^{1-x} + e} + 5$	Definition negativer Exponenten
$= -\frac{10e}{\frac{e}{e^x} + e} + 5$	Im Nenner die Brüche auf gleichen Nenner bringen
$= -\frac{10e}{\frac{e}{e^x} + \frac{ee^x}{e^x}} + 5$	Brüche zusammenfassen
$= -\frac{10e}{\frac{e + ee^x}{e^x}} + 5$	Doppelbruch beseitigen (Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= -\frac{10e}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e + ee^x} + 5$	Kürze e^x
$= -\frac{10e}{e + ee^x} + 5$	Durch e kürzen
$= -\frac{10}{1 + e^x} + 5$	Hauptnenner bilden
$= -\frac{10}{1 + e^x} + \frac{5(1 + e^x)}{1 + e^x}$	Klammer auflösen
$= -\frac{10}{1 + e^x} + \frac{5 + 5e^x}{1 + e^x}$	Brüche zusammenfassen
$= \frac{5e^x - 5}{1 + e^x}$	

$f(x_0+x) - y_0$ und $-f(x_0-x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(1/5)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3h - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{10e^x}{e^x + e} \quad \text{und} \quad P=(1,5)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{10e^x}{e^x + e} = 2 \cdot 5 - \frac{10e^{2-1-x}}{e^{2-1-x} + e}$	vereinfachen
$= 10 - \frac{10e^{2-x}}{e^{2-x} + e}$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= 10 - \frac{10e^2}{\frac{e^x}{e^2} + e}$	Im Nenner gleichnamige Brüche erzeugen
$= 10 - \frac{10e^2}{\frac{e^x}{e^2} + \frac{ee^x}{e^2}}$	In Nenner die Brüche addieren
$= 10 - \frac{10e^2}{\frac{e^x + ee^x}{e^2}}$	Doppelbruch beseitigen, indem man Zähler mit Kehrwert des Nenners multipliziert
$= 10 - \frac{10e^2}{e^2} \cdot \frac{e^x}{e^x + ee^x}$	Kürze e^x
$= 10 - \frac{10e^2}{e^2 + ee^x}$	Kürze e
$= 10 - \frac{10e}{e + e^x}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{10(e + e^x)}{e + e^x} - \frac{10e}{e + e^x}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{10(e + e^x) - 10e}{e + e^x}$	Klammer auflösen
$= \frac{10e + 10e^x - 10e}{e + e^x}$	vereinfachen
$\frac{10e^x}{e^x + e} = \frac{10e^x}{e + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(1/5)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3i - Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + e^4} \quad \text{und} \quad P = (2, 3)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$.
Wir berechnen $f(x_0+x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0-x) + y_0$ und
vergleichen dann beide Werte:

$$\begin{aligned} f(2+x) - 3 &= \frac{6e^{2(2+x)}}{e^{2(2+x)} + e^4} - 3 \\ &= \frac{6e^{4+2x}}{e^{4+2x} + e^4} - 3 \\ &= \frac{6e^4 e^{2x}}{e^4 e^{2x} + e^4} - 3 \\ &= \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 3 \\ &= \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{3(e^{2x} + 1)}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{3e^{2x} + 3}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{6e^{2x} - 3e^{2x} - 3}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{3e^{2x} - 3}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(2-x)+3 = -\frac{6e^{2(2-x)}}{e^{2(2-x)}+e^4}+3$	Klammern auflösen
$= -\frac{6e^{4-2x}}{e^{4-2x}+e^4}+3$	Definition negativer Exponenten
$= -\frac{6e^4}{\frac{e^4}{e^{2x}}+e^4}+3$	Die Summanden im Nenner auf gleichen Hauptnenner bringen
$= -\frac{6e^4}{\frac{e^4}{e^{2x}}+\frac{e^4 e^{2x}}{e^{2x}}}+3$	Im Nenner : Summanden auf einen Bruch bringen
$= -\frac{6e^4}{\frac{e^4+e^4 e^{2x}}{e^{2x}}}+3$	Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)
$= -\frac{6e^4}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{e^4+e^4 e^{2x}}+3$	e^{2x} kürzen
$= -\frac{6e^4}{e^4+e^4 e^{2x}}+3$	e^4 kürzen
$= -\frac{6}{1+e^{2x}}+3$	Auf einen Bruch bringen
$= -\frac{6}{1+e^{2x}}+\frac{3(1+e^{2x})}{1+e^{2x}}$	Klammer auflösen
$= -\frac{6}{1+e^{2x}}+\frac{3+3e^{2x}}{1+e^{2x}}$	Auf einen Bruch bringen
$= \frac{-6+3+3e^{2x}}{1+e^{2x}}$	vereinfachen
$= \frac{3e^{2x}-3}{1+e^{2x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(2/3)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3i - Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{6e^{2x}}{e^{2x} + e^4} \quad \text{und} \quad P=(2,3)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{6e^{2x}}{e^{2x} + e^4} = 2 \cdot 3 - \frac{6e^{2(2-x)}}{e^{2(2-x)} + e^4}$	Vereinfachen
$= 6 - \frac{6e^{8-2x}}{e^{8-2x} + e^4}$	Definition der negativen Exponenten anwenden
$= 6 - \frac{6e^8}{\frac{e^{2x}}{e^8} + e^4}$	Im Nenner die Konstante und den Bruch gleichnamig machen
$= 6 - \frac{6e^8}{\frac{e^8}{e^{2x}} + \frac{e^4 e^{2x}}{e^{2x}}}$	Im Nenner die Brüche addieren
$= 6 - \frac{6e^8}{\frac{e^8 + e^4 e^{2x}}{e^{2x}}}$	Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= 6 - \frac{6e^8}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{e^8 + e^4 e^{2x}}$	Kürze : e^{2x}
$= 6 - \frac{6e^8}{e^8 + e^4 e^{2x}}$	Kürze : e^4
$= 6 - \frac{6e^4}{e^4 + e^{2x}}$	gleichnamige Brüche bilden
$= \frac{6(e^4 + e^{2x})}{e^4 + e^{2x}} - \frac{6e^4}{e^4 + e^{2x}}$	Klammer auflösen
$= \frac{6e^4 + 6e^{2x}}{e^4 + e^{2x}} - \frac{6e^4}{e^4 + e^{2x}}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{6e^4 + 6e^{2x} - 6e^4}{e^4 + e^{2x}}$	Vereinfachen
$\frac{6e^{2x}}{e^{2x} + e^4} = \frac{6e^{2x}}{e^4 + e^{2x}}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(2/3)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3j

Gegeben:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{und} \quad P=(1,2)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x)-y_0 = -f(x_0-x)+y_0$

Wir berechnen $f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(1+x)-2 &= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(1+x)^2 + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(x^2 + 2x + 1) + 3(1+x) + 1 - 2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 3 + 3x + 1 - 2 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(1-x)+2 &= -\left[(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 3(1-x) + 1\right] + 2 \\ &= -\left[-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3(x^2 - 2x + 1) + 3(1-x) + 1\right] + 2 \\ &= -\left[-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 6x - 3 + 3 - 3x + 1\right] + 2 \\ &= \left[x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 3 + 3x - 1\right] + 2 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(1/2)$.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0-x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0-x)$.

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 2 \cdot 2 - \left[(2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 3(2-x) + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 3(4 - 4x + x^2) + 3(2-x) + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 12 + 12x - 3x^2 + 3(2-x) + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 - \left[-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 12 + 12x - 3x^2 + 6 - 3x + 1 \right] \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= 4 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 12 - 12x + 3x^2 - 6 + 3x - 1 \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 1 &= x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(1/2)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3k

Gegeben:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 \quad \text{und} \quad P = (3, 1)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$

Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(3+x) - 1 &= (3+x)^3 - 9(3+x)^2 + 27(3+x) - 26 - 1 \\ &= (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 9(x^2 + 6x + 9) + 81 + 27x - 27 \\ &= (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 9x^2 - 54x - 81 + 81 + 27x - 27 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 9x^2 - 54x - 81 + 81 + 27x - 27 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(3-x) + 1 &= -[(3-x)^3 - 9(3-x)^2 + 27(3-x) - 26] + 1 \\ &= -[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9(x^2 - 6x + 9) + 81 - 27x - 26] + 1 \\ &= -[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 54x - 81 + 81 - 27x - 26] + 1 \\ &= -[-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 54x - 27x - 26] + 1 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 9x^2 - 54x + 27x + 26 + 1 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(3/1)$.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^2 + 27x - 26 &= 2 \cdot 1 - [(6-x)^3 - 9(6-x)^2 + 27(6-x) - 26] \\ &= 2 \cdot 1 - [-x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 9(x^2 - 12x + 36) + 27(6-x) - 26] \\ &= 2 \cdot 1 - [-x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 9x^2 + 108x - 324 + 162 - 27x - 26] \\ &= 2 \cdot 1 + x^3 - 18x^2 + 108x - 216 + 9x^2 - 108x + 324 - 162 + 27x + 26 \\ x^3 - 9x^2 + 27x - 26 &= x^3 - 9x^2 + 27x - 26 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(3/1)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 3L

Gegeben:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \quad \text{und} \quad P = (-1, -3)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$

Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$$\begin{aligned} f(-1+x) - (-3) &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 2 + 3 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3(x^2 - 2x + 1) + 3x - 3 - 2 + 3 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 3x - 3 - 2 + 3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(-1-x) + (-3) &= -\left[(-x-1)^3 + 3(-x-1)^2 + 3(-x-1) - 2\right] - 3 \\ &= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\ &= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 6x + 3 - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\ &= -\left[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 6x + 3 - 3x - 3 - 2\right] - 3 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 + 3x + 3 + 2 - 3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(-1/-3)$.

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x - 2 &= 2 \cdot (-3) - \left[(-2-x)^3 + 3(-2-x)^2 + 3(-2-x) - 2\right] \\ &= -6 - \left[-x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3(x^2 + 4x + 4) - 6 - 3x - 2\right] \\ &= -6 - \left[-x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 3x^2 + 12x + 12 - 6 - 3x - 2\right] \\ &= -6 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x^2 - 12x - 12 + 6 + 3x + 2 \\ x^3 + 3x^2 + 3x - 2 &= x^3 + 3x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zu $P(-1/-3)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4a – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x + a}{e^x - a} \quad \text{und} \quad P = (\ln a, 0)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$
Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0 - x) + y_0$ und
vergleichen dann beide Werte:

$f(\ln a + x) - 0$	$= \frac{e^{\ln a + x} + a}{e^{\ln a + x} - a} - 0$	Potenzgesetz anwenden
	$= \frac{e^{\ln a} e^x + a}{e^{\ln a} e^x - a}$	$e^{\ln a} = a$
	$= \frac{ae^x + a}{ae^x - a}$	a ausklammern
	$= \frac{a(e^x + 1)}{a(e^x - 1)}$	Kürze : a
	$= \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x) + 0 = - \left[\frac{e^{\ln a - x} + a}{e^{\ln a - x} - a} \right] - 0$	<p>Definition negativer Exponenten anwenden</p>
$= - \left[\frac{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} - a} \right]$	<p>$e^{\ln a} = a$</p>
$= - \left[\frac{\frac{a}{e^x} + a}{\frac{a}{e^x} - a} \right]$	<p>Hauptnenner bilden (im Zähler und Nenner)</p>
$= - \left[\frac{\frac{a}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}}{\frac{a}{e^x} - \frac{ae^x}{e^x}} \right]$	<p>Brüche addieren</p>
$= - \left[\frac{\frac{a+ae^x}{e^x}}{\frac{a-ae^x}{e^x}} \right]$	<p>Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)</p>
$= - \frac{a+ae^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{a-ae^x}$	<p>Kürze : e^x</p>
$= - \frac{a+ae^x}{a-ae^x}$	<p>a ausklammern</p>
$= - \frac{1+e^x}{1-e^x}$	<p>Minuszeichen in den Nenner bringen</p>
$= \frac{1+e^x}{-(1-e^x)}$	<p>Klammer auflösen</p>
$= \frac{1+e^x}{e^x - 1}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a/0)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4a – Lösungsvariante 2

Gegeben: $f(x) = \frac{e^x + a}{e^x - a}$ und $P=(\ln a, 0)$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x + a}{e^x - a} = 2 \cdot 0 - \left[\frac{e^{2\ln a - x} + a}{e^{2\ln a - x} - a} \right]$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= - \left[\frac{\frac{e^{2\ln a}}{e^x} + a}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x} - a} \right]$	Bruch und Konstante gleichnamig machen
$= - \left[\frac{\frac{e^{2\ln a}}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^x} - \frac{ae^x}{e^x}} \right]$	Brüche addieren bzw. subtrahieren
$= - \left[\frac{\frac{e^{2\ln a} + ae^x}{e^x}}{\frac{e^{2\ln a} - ae^x}{e^x}} \right]$	Doppelbruch beseitigen
$= - \left[\frac{e^{2\ln a} + ae^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{e^{2\ln a} - ae^x} \right]$	Kürze : e^x
$= - \left[\frac{e^{2\ln a} + ae^x}{e^{2\ln a} - ae^x} \right]$	Potenzgesetz anwenden
$= - \left[\frac{(e^{\ln a})^2 + ae^x}{(e^{\ln a})^2 - ae^x} \right]$	$e^{\ln a} = a$
$= - \left[\frac{a^2 + ae^x}{a^2 - ae^x} \right]$	a ausklammern
$= - \left[\frac{a(a + e^x)}{a(a - e^x)} \right]$	Kürze : a
$= - \left[\frac{a + e^x}{a - e^x} \right]$	Minuszeichen in den Nenner bringen
$= \frac{a + e^x}{-(a - e^x)}$	Klammer auflösen
$\frac{e^x + a}{e^x - a} = \frac{a + e^x}{e^x - a}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln a/0)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4b – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{b}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{b}{2a} \right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0 + x) - y_0 = -f(x_0 - x) + y_0$
Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0 - x) + y_0$
und vergleichen beide Werte:

$f(\ln a + x) - \frac{b}{2a} = \frac{b}{e^{\ln a + x} + a} - \frac{b}{2a}$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{b}{e^{\ln a} e^x + a} - \frac{b}{2a}$	$e^{\ln a} = a$
$= \frac{b}{ae^x + a} - \frac{b}{2a}$	Brüche auf Hauptnenner bringen
$= \frac{2ab}{2a(ae^x + a)} - \frac{b(ae^x + a)}{2a(ae^x + a)}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{2ab - b(ae^x + a)}{2a(ae^x + a)}$	Klammern auflösen
$= \frac{2ab - abe^x - ab}{2a^2e^x + 2a^2}$	Zähler vereinfachen
$= \frac{ab - abe^x}{2a^2e^x + 2a^2}$	Kürze : a
$= \frac{b - be^x}{2ae^x + 2a}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$$-f(\ln a - x) + \frac{b}{2a} = -\frac{b}{e^{\ln a - x} + a} + \frac{b}{2a}$$

**Definition negativer
Exponenten anwenden**

$$= -\frac{b}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a} + \frac{b}{2a}$$

Hauptnenner bilden

$$= -\frac{b}{\frac{a}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2a}$$

Brüche addieren

$$= -\frac{b}{\frac{a + ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2a}$$

Doppelbruch beseitigen

$$= -\frac{be^x}{a + ae^x} + \frac{b}{2a}$$

Brüche gleichnamig machen

$$= -\frac{2abe^x}{2a(a + ae^x)} + \frac{b(a + ae^x)}{2a(a + ae^x)}$$

Klammer im Zähler auflösen

$$= -\frac{2abe^x}{2a(a + ae^x)} + \frac{ab + abe^x}{2a(a + ae^x)}$$

**Brüche subtrahieren
und vereinfachen**

$$= \frac{ab - abe^x}{2a^2 + 2a^2e^x}$$

Kürze : a

$$= \frac{b - be^x}{2a + 2ae^x}$$

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{b}{2a})$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4b – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{b}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{b}{2a}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{b}{e^x + a} = 2 \cdot \frac{b}{2a} - \left[\frac{b}{e^{2\ln a - x} + a} \right]$	Im linken Bruch 2 kürzen und im rechten Bruch die Definition negativer Exponenten anwenden
$= \frac{b}{a} - \left[\frac{b}{\frac{a^2}{e^x} + a} \right]$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{b}{a} - \frac{b}{\frac{a^2}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}}$	Brüche addieren
$= \frac{b}{a} - \frac{b}{\frac{a^2 + ae^x}{e^x}}$	Doppelbruch beseitigen
$= \frac{b}{a} - \frac{be^x}{a^2 + ae^x}$	In Nenner a ausklammern
$= \frac{b}{a} - \frac{be^x}{a(a + e^x)}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{b(a + e^x)}{a(a + e^x)} - \frac{be^x}{a(a + e^x)}$	Brüche subtrahieren
$= \frac{b(a + e^x) - be^x}{a(a + e^x)}$	Im Zähler : Klammer auflösen
$= \frac{ab + be^x - be^x}{a(a + e^x)}$	Zähler vereinfachen
$= \frac{ab}{a(a + e^x)}$	Kürze : a
$\frac{b}{e^x + a} = \frac{b}{a + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(\ln a, \frac{b}{2a}\right)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4c – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{1}{2} \right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$

Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0 - x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$f(\ln a + x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{\ln a + x}}{e^{\ln a + x} + a} - \frac{1}{2}$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{e^{\ln a} e^x}{e^{\ln a} e^x + a} - \frac{1}{2}$	$e^{\ln a} = a$
$= \frac{a e^x}{a e^x + a} - \frac{1}{2}$	a ausklammern
$= \frac{a e^x}{a(e^x + 1)} - \frac{1}{2}$	Kürze : a
$= \frac{e^x}{(e^x + 1)} - \frac{1}{2}$	gleichnamig machen
$= \frac{2e^x}{2(e^x + 1)} - \frac{1(e^x + 1)}{2(e^x + 1)}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{2e^x - (e^x + 1)}{2(e^x + 1)}$	Klammern auflösen
$= \frac{e^x - 1}{2e^x + 2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f(\ln a - x) + \frac{1}{2} = -\frac{e^{\ln a - x}}{e^{\ln a - x} + a} + \frac{1}{2}$	Potenzgesetz anwenden
$= -\frac{\frac{e^{\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a} + \frac{1}{2}$	gleichnamig machen
$= -\frac{\frac{e^{\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}} + \frac{1}{2}$	Brüche addieren
$= -\frac{\frac{a}{e^x}}{\frac{a + ae^x}{e^x}} + \frac{1}{2}$	Doppelbruch beseitigen
$= -\frac{a}{e^x} \cdot \frac{e^x}{a + ae^x} + \frac{1}{2}$	Durch e^x kürzen
$= -\frac{a}{a + ae^x} + \frac{1}{2}$	Kürze : a
$= -\frac{1}{1 + e^x} + \frac{1}{2}$	gleichnamig machen
$= -\frac{2 \cdot 1}{2(1 + e^x)} + \frac{1(1 + e^x)}{2(1 + e^x)}$	Brüche addieren
$= \frac{-2 + 1 + e^x}{2(1 + e^x)}$	vereinfachen
$= \frac{e^x - 1}{2 + 2e^x}$	

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{1}{2})$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4c – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{1}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{e^x}{e^x + a} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{e^{2\ln a - x}}{e^{2\ln a - x} + a}$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= 1 - \frac{e^{2\ln a}}{\frac{e^x}{e^{2\ln a}} + a}$	gleichnamig machen
$= 1 - \frac{a^2}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}}$	addiere die Brüche
$= 1 - \frac{a^2}{\frac{e^x}{a^2 + ae^x}}$	Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= 1 - \frac{a^2}{e^x} \cdot \frac{e^x}{a^2 + ae^x}$	Kürze : e^x
$= 1 - \frac{a^2}{a^2 + ae^x}$	Kürze : a
$= 1 - \frac{a}{a + e^x}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{a + e^x}{a + e^x} - \frac{a}{a + e^x}$	Subtrahiere Brüche
$= \frac{a + e^x - a}{a + e^x}$	vereinfachen
$\frac{e^x}{e^x + a} = \frac{e^x}{a + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln a, \frac{1}{2})$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4d – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{be^x}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{b}{2} \right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$

Wir berechnen $f(x_0 + x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0 - x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$f(\ln a + x) - \frac{b}{2} = \frac{be^{\ln a + x}}{e^{\ln a + x} + a} - \frac{b}{2}$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{be^{\ln a} e^x}{e^{\ln a} e^x + a} - \frac{b}{2}$	$e^{\ln a} = a$
$= \frac{bae^x}{ae^x + a} - \frac{b}{2}$	im Nenner a ausklammern
$= \frac{abe^x}{a(e^x + 1)} - \frac{b}{2}$	Kürze : a
$= \frac{be^x}{(e^x + 1)} - \frac{b}{2}$	auf gleichen Nenner bringen
$= \frac{2be^x}{2(e^x + 1)} - \frac{b(e^x + 1)}{2(e^x + 1)}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{2be^x - (be^x + b)}{2(e^x + 1)}$	Klammer auflösen
$= \frac{2be^x - be^x - b}{2e^x + 2}$	vereinfachen
$= \frac{be^x - b}{2e^x + 2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$$-f(\ln a - x) + \frac{1}{2} = -\frac{be^{\ln a - x}}{e^{\ln a - x} + a} + \frac{b}{2}$$

Definition negativer Exponenten anwenden

$$= -\frac{b \cdot \frac{e^{\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + a} + \frac{b}{2}$$

Im Nenner : Bruch und Zahl a gleichnamig machen

$$= -\frac{b \cdot \frac{e^{\ln a}}{e^x}}{\frac{e^{\ln a}}{e^x} + \frac{ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2}$$

**1. Im Nenner Bruch addieren
2. $e^{\ln a} = a$**

$$= -\frac{b \frac{a}{e^x}}{\frac{a + ae^x}{e^x}} + \frac{b}{2}$$

Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)

$$= -\frac{ba}{e^x} \cdot \frac{e^x}{a + ae^x} + \frac{b}{2}$$

Kürze e^x

$$= -\frac{ba}{a + ae^x} + \frac{b}{2}$$

Kürze a

$$= -\frac{b}{1 + e^x} + \frac{b}{2}$$

Brüche gleichnamig machen

$$= -\frac{2b}{2(1 + e^x)} + \frac{b(1 + e^x)}{2(1 + e^x)}$$

Brüche addieren

$$= \frac{b + be^x - 2b}{2(1 + e^x)}$$

Vereinfachen

$$= \frac{be^x - b}{2 + 2e^x}$$

$f(x_0 + x) - y_0$ und $-f(x_0 - x) + y_0$ sind gleich, also ist die Funktion

tatsächlich punktsymmetrisch zu $P(\ln a / \frac{b}{2})$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4d – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{be^x}{e^x + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\ln a, \frac{b}{2}\right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{be^x}{e^x + a} = 2 \cdot \frac{b}{2} - \frac{be^{2\ln a - x}}{e^{2\ln a - x} + a}$	vereinfachen
$= b - \frac{be^{2\ln a - x}}{e^{2\ln a - x} + a}$	Definition negativer Exponenten
$= b - \frac{be^{2\ln a}}{e^x + a}$	Im Nenner Bruch und Zahl gleichnamig machen
$= b - \frac{ba^2}{\frac{e^x}{a^2} + \frac{ae^x}{e^x}}$	Im Nenner : Brüche addieren
$= b - \frac{ba^2}{\frac{e^x}{a^2 + ae^x}}$	Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)
$= b - \frac{ba^2}{e^x} \cdot \frac{e^x}{a^2 + ae^x}$	Kürze : e^x
$= b - \frac{ba^2}{a^2 + ae^x}$	Kürze : a
$= b - \frac{ba}{a + e^x}$	Auf Hauptnenner bringen
$= \frac{b(a + e^x)}{a + e^x} - \frac{ba}{a + e^x}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{ba + be^x - ba}{a + e^x}$	vereinfachen
$\frac{be^x}{e^x + a} = \frac{be^x}{a + e^x}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(\ln a / \frac{b}{2}\right)$ ist.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4e – Lösungsvariante 1

Gegeben:

$$f(x) = \frac{be^{2x}}{e^{2x} + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\frac{\ln a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x_0+x) - y_0 = -f(x_0-x) + y_0$

Wir berechnen $f(x_0+x) - y_0$ und auf der nächsten Seite $-f(x_0-x) + y_0$ und vergleichen beide Werte:

$f\left(\frac{\ln a}{2} + x\right) - \frac{b}{2} = \frac{be^{2 \cdot \left(\frac{\ln a}{2} + x\right)}}{e^{2 \cdot \left(\frac{\ln a}{2} + x\right)} + a} - \frac{b}{2}$	Exponent vereinfachen
$= \frac{be^{\ln a + 2x}}{e^{\ln a + 2x} + a} - \frac{b}{2}$	Potenzgesetz anwenden
$= \frac{be^{\ln a} e^{2x}}{e^{\ln a} e^{2x} + a} - \frac{b}{2}$	$e^{\ln a} = a$
$= \frac{bae^{2x}}{ae^{2x} + a} - \frac{b}{2}$	Kürze : a
$= \frac{be^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{b}{2}$	auf Hauptnenner bringen
$= \frac{2be^{2x}}{2(e^{2x} + 1)} - \frac{b(e^{2x} + 1)}{2(e^{2x} + 1)}$	Bruch subtrahieren
$= \frac{2be^{2x} - be^{2x} - b}{2(e^{2x} + 1)}$	vereinfachen
$= \frac{be^{2x} - b}{2(e^{2x} + 1)}$	Klammer auflösen
$= \frac{be^{2x} - b}{2e^{2x} + 2}$	

Übungen zum Kurs Symmetrie

$-f\left(\frac{\ln a}{2} - x\right) + \frac{b}{2} = -\frac{be^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}-x\right)}}{e^{2\cdot\left(\frac{\ln a}{2}-x\right)} + a} + \frac{b}{2}$	<p>Exponent vereinfachen</p>
$= -\frac{be^{\ln a - 2x}}{e^{\ln a - 2x} + a} + \frac{b}{2}$	<p>Definition für "negative Exponenten" anwenden</p>
$= -\frac{b \frac{e^{\ln a}}{e^{2x}}}{\frac{e^{\ln a}}{e^{2x}} + a} + \frac{b}{2}$	<p>Im Nenner den Hauptnenner bilden</p>
$= -\frac{\frac{ba}{e^{2x}}}{\frac{a}{e^{2x}} + \frac{ae^{2x}}{e^{2x}}} + \frac{b}{2}$	<p>auf einen Bruch bringen</p>
$= -\frac{\frac{ba}{e^{2x}}}{\frac{a + ae^{2x}}{e^{2x}}} + \frac{b}{2}$	<p>Doppelbruch beseitigen (mit Kehrwert multiplizieren)</p>
$= -\frac{ba}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{a + ae^{2x}} + \frac{b}{2}$	<p>kürze e^{2x} und a</p>
$= -\frac{b}{1 + e^{2x}} + \frac{b}{2}$	<p>Brüche gleichnamig machen</p>
$= -\frac{2b}{2(1 + e^{2x})} + \frac{b(1 + e^{2x})}{2(1 + e^{2x})}$	<p>Brüche addieren</p>
$= \frac{b(1 + e^{2x}) - 2b}{2(1 + e^{2x})}$	<p>Klammer auflösen</p>
$= \frac{b + be^{2x} - 2b}{2(1 + e^{2x})}$	<p>vereinfachen</p>
$= \frac{be^{2x} - b}{2 + 2e^{2x}}$	

$f(x_0+x)-y_0$ und $-f(x_0-x)+y_0$ sind gleich, also ist die Funktion tatsächlich punktsymmetrisch zu $P\left(\frac{\ln a}{2} / \frac{b}{2}\right)$.

Übungen zum Kurs Symmetrie

Lösung zu 4e – Lösungsvariante 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{be^{2x}}{e^{2x} + a} \quad \text{und} \quad P = \left(\frac{\ln a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Lösungsweg mit Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$:

Bei dieser Variante der Lösung benutzen wir die Formel $f(x) = 2y_0 - f(2x_0 - x)$

Wir setzen die gegebenen Werte in die Formel ein und überprüfen, ob eine wahre Aussage entsteht:

$\frac{be^{2x}}{e^{2x} + a} = 2 \cdot \frac{b}{2} - \frac{be^{2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\ln a}{2} - x\right)}}{e^{2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\ln a}{2} - x\right)} + a}$	Exponenten vereinfachen
$= b - \frac{be^{2\ln a - 2x}}{e^{2\ln a - 2x} + a}$	Definition negativer Exponenten anwenden
$= b - \frac{b \frac{e^{2\ln a}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2\ln a}}{e^{2x}} + a}$	Vereinfache: $e^{2\ln a} = (e^{\ln a})^2 = a^2$
$= b - \frac{\frac{ba^2}{e^{2x}}}{\frac{a^2}{e^{2x}} + a}$	Im Nenner den beide Brüche gleichnamig machen.
$= b - \frac{\frac{ba^2}{e^{2x}}}{\frac{a^2 + ae^{2x}}{e^{2x}}}$	Im Nenner Brüche addieren
$= b - \frac{\frac{ba^2}{e^{2x}}}{\frac{a^2 + ae^{2x}}{e^{2x}}}$	Doppelbruch beseitigen (Zähler mit Kehrwert des Nenners multiplizieren)
$= b - \frac{ba^2}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{a^2 + ae^{2x}}$	Kürze: e^{2x}
$= b - \frac{ba^2}{a^2 + ae^{2x}}$	Kürze: a
$= b - \frac{ba}{a + e^{2x}}$	Auf Hauptnenner bringen
$= \frac{b(a + e^{2x})}{a + e^{2x}} - \frac{ba}{a + e^{2x}}$	Gleichnamige Brüche subtrahieren
$= \frac{b(a + e^{2x}) - ba}{a + e^{2x}}$	vereinfachen
$\frac{be^{2x}}{e^{2x} + a} = \frac{be^{2x}}{a + e^{2x}}$	

Weil beide Seiten der Gleichung gleich sind, ist bewiesen,

dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $P\left(\frac{\ln a}{2} / \frac{b}{2}\right)$ ist.