42.Trigonometrie - Beziehungen

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

$\boxed{1}$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\boxed{2}$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Aus 3a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 3b und 3c:

$\boxed{3a}$ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ $\boxed{3b}$ $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ $\boxed{3c}$ $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Satz 4 ist der „**Trigonometrische Pythagoras**“

$\boxed{4a}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\boxed{4b}$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\boxed{4c}$ $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Aus 5a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 5b und 5c

$\boxed{5a}$ $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$ $\boxed{5b}$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ $\boxed{5c}$ $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

Aus 6a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 6b und 6c

$\boxed{6a}$ $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot^2\alpha$ $\boxed{6b}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$ $\boxed{6c}$ $\cot^2\alpha = \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

Mit Satz 7-10 kann man jedes Winkelverhältnis in ein anderes umformen
(die Vorzeichen der Wurzeln hängen dabei vom Quadranten ab)

$\boxed{7}$ $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$

$\boxed{8}$ $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$\boxed{9}$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

$\boxed{10}$ $\cot\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

42.Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 1

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Beweis:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \Big|\ \text{erweitern}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}} \qquad \Big|\ \text{Zähler und Nenner durch "Hypothenuse" teilen}$$

$$\tan\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}}$$

$$\tan\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

42.Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 2

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Erweitern des Bruches

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}}$$

$$\cot\alpha = \cos\alpha \cdot \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}}$$

Zähler und Nenner durch "Hypothenuse" teilen

$$\cot\alpha = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}}$$

$$\cot\alpha = \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} = \boxed{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

42.Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 3a-c

$\boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1}$

Beweis:

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

3b und 3c folgen direkt aus Satz 3a

Beweis von Satz 4

Folgt aus dem normalen „Satz des Pythagoras“.

Beweis von Satz 5

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha}$$

Beweis

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\overset{\substack{\text{Satz 4}\\\text{anwenden}}}{=}\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\overset{\text{Bruchrechnung}}{=}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\overset{\substack{\text{Satz 1}\\\text{anwenden}}}{=}\tan^2(\alpha)+1\overset{\substack{\text{umgekehrte}\\\text{Schreibweise}}}{=}1+\tan^2\alpha$$

Beweis von Satz 6

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha}$$

Beweis

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\overset{\substack{\text{Satz 4}\\\text{anwenden}}}{=}\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\overset{\text{Bruchrechnung}}{=}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\overset{\substack{\text{Satz 2}\\\text{anwenden}}}{=}1+\cot^2\alpha$$

42.Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 8

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Wir erinnern uns an Satz 4 (trigonometrischer Pythagoras):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dann stellen wir Satz 4 nach $\cos\alpha$ um:

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$ **Satz 8a**

Wir ersetzen $\sin^2\alpha$ durch Formel 6b: $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}$$

Den Radikanten vereinfachen (auf einen Nenner bringen) und vereinfachen:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}-\frac{1}{1+\cot^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\cot^2\alpha-1}{1+\cot^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}} =$$

Dann Wurzelgesetz anwenden:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\cot^2\alpha}}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \boxed{\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$ **Satz 8b**

Wir ersetzen $\cot\alpha$ im Zähler und Nenner durch Formel 3c: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{\tan\alpha}}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}} = \frac{1}{\tan\alpha\cdot\sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}+\frac{1}{\tan^2\alpha}}} = \frac{1}{\tan\alpha\cdot\sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}}}$$

$\tan\alpha = \sqrt{\tan^2\alpha}$ benutzen, um $\tan\alpha$ unter die Wurzel zu bringen, dann kürzen:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha\cdot\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$ **Satz 8c**

Beweis von Satz 7

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$

Wir erinnern uns an Satz 4 (trigonometrischer Pythagoras):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dann stellen wir Satz 4 nach $\sin\alpha$ um:

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}}$$ **Satz 7a**

Wir ersetzen $\cos^2\alpha$ durch Formel 5b: $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} =$$

Den Radikanten vereinfachen (auf einen Nenner bringen) und vereinfachen:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} - \frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\tan^2(\alpha)-1}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}} =$$

Dann Wurzelgesetz anwenden:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\tan^2\alpha}}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \boxed{\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$ **Satz 7b**

Wir ersetzen tan α im Zähler und Nenner durch Formel 3b: $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\cot\alpha\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2\alpha}}} = \frac{1}{\cot\alpha\cdot\sqrt{\frac{\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}+\frac{1}{\cot^2\alpha}}} = \frac{1}{\cot\alpha\cdot\sqrt{\frac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}}} =$$

$\cot\alpha = \sqrt{\cot^2\alpha}$ benutzen, um $\cot\alpha$ unter die Wurzel zu bringen, dann kürzen:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha\cdot\frac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha\cdot\frac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$ **Satz 7c**

Beweis von Satz 9

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}}$$

Satz 1 lautete:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\cos\alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4c: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}$$ **Satz 9a**

Um Satz 9b zu beweisen, nehmen wir nochmals Satz 1:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\sin\alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4b: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$$ **Satz 9b**

Satz 9c haben wir schon bewiesen, er entspricht Hilfssatz 3b:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}}$$ **Satz 9c**

42.Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 10

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

Satz 2 lautete:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\cos\alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4c: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}}$$ **Satz 10a**

Um Satz 10b zu beweisen, nehmen wir nochmals Satz 2:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$\sin\alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4b: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}}$$ **Satz 10b**

Satz 10c haben wir schon bewiesen, er entspricht Hilfssatz 3c:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$ **Satz 10c**