

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

$$\boxed{1} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\boxed{2} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Aus 3a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 3b und 3c:

$$\boxed{3a} \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\boxed{3b} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\boxed{3c} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Satz 4 ist der „Trigonometrische Pythagoras“

$$\boxed{4a} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\boxed{4b} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\boxed{4c} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Aus 5a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 5b und 5c

$$\boxed{5a} \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\boxed{5b} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\boxed{5c} \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Aus 6a erhält man durch einfaches Formelumstellen die Hilfssätze 6b und 6c

$$\boxed{6a} \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\boxed{6b} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

$$\boxed{6c} \quad \cot^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Mit Satz 7-10 kann man jedes Winkelverhältnis in ein anderes umformen

(die Vorzeichen der Wurzeln hängen dabei vom Quadranten ab)

$$\boxed{7} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$$

$$\boxed{8} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\cot \alpha}{\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\boxed{9} \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\boxed{10} \quad \cot \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 1

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Beweis:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad | \text{erweitern}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Zähler und Nenner durch} \\ \text{"Hypotenuse" teilen} \end{array} \right.$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 2

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Erweitern
des Bruches

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \cdot \frac{\text{Hypothense}}{\text{Hypothense}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}} \cdot \frac{\text{Hypothense}}{\text{Gegenkathete}}$$

$$\cot \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\text{Hypothense}}{\text{Gegenkathete}}$$

Zähler und Nenner durch
"Hypothense" teilen

$$\cot \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothense}}}$$

$$\cot \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \boxed{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 3a-c

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Beweis:

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

3b und 3c folgen direkt aus Satz 3a

Beweis von Satz 4

Folgt aus dem normalen „Satz des Pythagoras“.

Beweis von Satz 5

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

Beweis

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \stackrel{\substack{\text{Satz 4} \\ \text{anwenden}}}{=} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \stackrel{\text{Bruchrechnung}}{=} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \stackrel{\substack{\text{Satz 1} \\ \text{anwenden}}}{=} \tan^2(\alpha) + 1 \stackrel{\substack{\text{umgekehrte} \\ \text{Schreibweise}}}{=} 1 + \tan^2 \alpha$$

Beweis von Satz 6

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$$

Beweis

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\substack{\text{Satz 4} \\ \text{anwenden}}}{=} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\text{Bruchrechnung}}{=} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \stackrel{\substack{\text{Satz 2} \\ \text{anwenden}}}{=} 1 + \cot^2 \alpha$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 8

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Wir erinnern uns an Satz 4 (trigonometrischer Pythagoras):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dann stellen wir Satz 4 nach $\cos \alpha$ um:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{Satz 8a}$$

Wir ersetzen $\sin^2 \alpha$ durch Formel 6b: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}}$$

Den Radikanten vereinfachen (auf einen Nenner bringen) und vereinfachen:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \cot^2 \alpha - 1}{1 + \cot^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}} =$$

Dann Wurzelgesetz anwenden:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\cot^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \quad \text{Satz 8b}$$

Wir ersetzen $\cot \alpha$ im Zähler und Nenner durch Formel 3c: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{\tan \alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}} = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}} = \frac{1}{\tan \alpha \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha}}}$$

$\tan \alpha = \sqrt{\tan^2 \alpha}$ benutzen, um $\tan \alpha$ unter die Wurzel zu bringen, dann kürzen:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{Satz 8c}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 7

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$$

Wir erinnern uns an Satz 4 (trigonometrischer Pythagoras):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dann stellen wir Satz 4 nach $\sin \alpha$ um:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{Satz 7a}$$

Wir ersetzen $\cos^2 \alpha$ durch Formel 5b: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} =$$

Den Radikanten vereinfachen (auf einen Nenner bringen) und vereinfachen:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} =$$

Dann Wurzelgesetz anwenden:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\tan^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{Satz 7b}$$

Wir ersetzen $\tan \alpha$ im Zähler und Nenner durch Formel 3b: $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\cot \alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{1}{\cot \alpha \cdot \sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{1}{\cot \alpha \cdot \sqrt{\frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha}}} =$$

$\cot \alpha = \sqrt{\cot^2 \alpha}$ benutzen, um $\cot \alpha$ unter die Wurzel zu bringen, dann kürzen:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \alpha \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \alpha \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} \quad \text{Satz 7c}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 9

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

Satz 1 lautet:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\cos \alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4c: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{Satz 9a}$$

Um Satz 9b zu beweisen, nehmen wir nochmals Satz 1:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\sin \alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4b: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \quad \text{Satz 9b}$$

Satz 9c haben wir schon bewiesen, er entspricht Hilfssatz 3b:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \text{Satz 9c}$$

42. Trigonometrie - Beziehungen

Beweis von Satz 10

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

Satz 2 lautete:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\cos \alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4c: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \quad \text{Satz 10a}$$

Um Satz 10b zu beweisen, nehmen wir nochmals Satz 2:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\sin \alpha$ ersetzen wird durch Hilfssatz 4b: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} \quad \text{Satz 10b}$$

Satz 10c haben wir schon bewiesen, er entspricht Hilfssatz 3c:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \text{Satz 10c}$$